



第四章

指数函数与对数函数

4.1 指数

4.1.1 n 次方根与分数指数幂+

4.1.2 无理数指数幂及其运算性质



对点上分

1. C 【解析】由 $1 < a < 2$, 得 $1 - a < 0, 2 - a > 0$, 所以 $\sqrt[3]{(1-a)^3} + \sqrt[4]{(2-a)^4} = 1 - a + |2 - a| = 1 - a + 2 - a = 3 - 2a$. 故选 C.

易错警示

忽略 $\sqrt[n]{a^n}$ 中 n 的奇偶而致错

对于 $\sqrt[n]{a^n}$, 其结果需要根据 n 的奇偶来作决定, 若 n 为奇数, 则 $\sqrt[n]{a^n} = a$; 若 n 为偶数, 则 $\sqrt[n]{a^n} = |a|$.

2. B 【解析】由题意可得 $a - 2\,023 \geq 0$, 解得 $a \geq 2\,023$, 则 $a - 2\,022 + \sqrt{a - 2\,023} = a$, 所以 $\sqrt{a - 2\,023} = 2\,022$, 则 $a - 2\,023 = 2\,022^2$, 所以 $a - 2\,022^2 = 2\,023$, 故 B 正确.

3. A 【解析】对于 A, 因为 $a < 0$, 当 m 为奇数, n 为偶数时, $a^m < 0$, 此时 $\sqrt[n]{a^m}$ 无意义, 故 A 错误;

对于 B, 因为 $a < 0$, 当 m 为偶数, n 为奇数时, $a^m > 0$, 此时 $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, 故 B 正确;

对于 C, 因为 $a < 0$, 当 m 为奇数, n 为奇数时, $a^m < 0$, 此时 $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, 故 C 正确;

对于 D, 因为 $a < 0$, 当 m 为偶数, n 为偶数时, $a^m > 0$, 此时 $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, 故 D 正确. 故选 A.

4. A 【解析】 $\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a}} = \sqrt[4]{a \cdot a^{\frac{1}{3}}} = (a^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{3}}$. 故选 A.

5. $\frac{35}{8} + \pi$ 【解析】原式 $= 4 + \pi - 3 +$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{4 \times \frac{3}{4}} = 1 + \pi + \frac{27}{8} = \frac{35}{8} + \pi.$$

6. C



攻略上分

本题是关于指数幂的运算, 可利用通法攻略 27 中的指数幂运算口诀.



【解析】原式 $= \frac{3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{6}} \times 2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}} + \left(\frac{1}{10}\right)^{3 \times (-\frac{1}{3})} +$

$2 - \sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}} + 10 + 2 - \sqrt{3} = 12$, 故 C 正确.

7. B



攻略上分

根据题意可知 $a^{\frac{2m+3n}{2}}$

与 $a^m = 3, a^n = 4$ 的底数相同, 且由 m, n 构成, 因此利用通法攻略 27 中的指数幂运算口诀的逆用即可得解.

【解析】 $a^{\frac{2m+3n}{2}} = a^m \cdot a^{\frac{3n}{2}} = 3(a^n)^{\frac{3}{2}} = 3 \times 4^{\frac{3}{2}} = 24$. 故选 B.

8. $\frac{7}{3}$ 【解析】若 $a^{2x} = 3$, 则 $\frac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^x + a^{-x}} =$
 $\frac{a^{4x} + a^{-2x}}{a^{2x} + 1} = \frac{3^2 + 3^{-1}}{3 + 1} = \frac{7}{3}$.

9. D



攻略上分

本题将 $3a + b = 4$ 看作一个整体, 结合实数指数幂的运算性质求解, 对于整体法的应用, 可见大招攻略 28 中的解决条件求值问题的一般步骤.

【解析】因为 $3a + b = 4$, 所以 $8^a + 2^b = 2^{3a} + 2^b \geq 2\sqrt{2^{3a} \cdot 2^b} = 2\sqrt{2^{3a+b}} = 2\sqrt{2^4} = 8$, 当且仅当 $2^{3a} = 2^b$ 即 $3a = b = 2$ 时等号成立, 故选 D.

10. C 【解析】设植物原来长度为 m , 经过

8 天后, 该植物的长度是原来的 $\frac{3}{2}$ 倍,

故 $m(1+a\%)^8 = \frac{3}{2}m$, 即 $(1+a\%)^8 = \frac{3}{2}$,

即 $1+a\% = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{8}}$.

24 天后该植物的长度是 $m(1+a\%)^{24}$, 即为原来的 $(1+a\%)^{24}$ 倍, 则 $(1+a\%)^{24} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{8} \times 24} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$, 即 24

天后该植物的长度是原来的 $\frac{27}{8}$ 倍, 故

选 C.

11. $\frac{5}{2}$ 

攻略上分

将 $a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}} = 1$ 左右

两边分别平方得到 $a + a^{-1} = 3$, 再用完全平方公式、立方差公式变形代入即可求解, 具体公式可见大招攻略 28 中的指数幂中常用乘法公式及变形.



【解析】将 $a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}} = 1$ 左右两边分别平方得 $a + a^{-1} - 2 = 1$, 即 $a + a^{-1} = 3$, 又 $(a + a^{-1})^2 = a^2 + a^{-2} + 2$, 则 $\frac{a^2 + a^{-2} + 3}{a^{\frac{3}{2}} - a^{-\frac{3}{2}}} = \frac{(a + a^{-1})^2 - 2 + 3}{(a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}})(a + 1 + a^{-1})} = \frac{3^2 + 1}{1 \times (3 + 1)} = \frac{5}{2}$.

4.2 指数函数

4.2.1 指数函数的概念



对点上分

1. C 【解析】形如 $y = a^x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 的函数为指数函数, $y = 2 \cdot 3^x$ 的 3^x 系数不为 1, 故 A 错误;

$y = 3^{x+1}$ 的指数不是 x , 故 B 错误;

$y = x^3$ 是幂函数, 故 D 错误;

只有 $y = 3^x$ 符合指数函数的定义, 故 C 正确.

易错警示

忽略指数函数的特征而出错

判断指数函数时要注意以下几点: ①底数 a 为大于 0 且不等于 1 的常数; ②指数位置是自变量 x , 且 x 的系数是 1; ③ a^x 的系数是 1.

2. B 【解析】由题意可知, $\begin{cases} a^2 - 5a + 7 = 1, \\ 6 - 2a = 0, \end{cases}$

解得 $a = 3$, 故 B 正确.

3. D 【解析】函数 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x > 0, \\ \left(\frac{1}{2}\right)^x, & x \leq 0, \end{cases}$

则 $f(-4) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 16$, 所以

$f(f(-4)) = f(16) = \sqrt{16} = 4$. 故选 D.

4. 【解】(1) 由题知, $f(x) = a^x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 的图象过点 $(2, 4)$, 所以 $f(2) = a^2 = 4$, $\therefore a = 2$, $\therefore f(x) = 2^x$.

(2) 由题知, $g(x) = \frac{2^x - m}{2^x + m}$ ($m > 0$) 是奇函数, 因为 $m > 0$, 所以 $2^x + m > 0$ 恒成立,

所以 $g(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} ,

所以 $g(0) = \frac{2^0 - m}{2^0 + m} = 0$, 所以 $m = 1$.

经检验, $m = 1$ 满足题意. 故 $m = 1$.

5. C 【解析】设湖泊中原来蓝藻数量为 a ,



由题可知 $a(1+6.25\%)^{30} \approx 6a$, 则经过 60 天后该湖泊的蓝藻数量为 $a(1+6.25\%)^{60} = a[(1+6.25\%)^{30}]^2 \approx 36a$.

故经过 60 天后该湖泊的蓝藻数大约为原来的 36 倍. 故 C 正确.

6. 【解】(1) 若选 $y = ka^x$, 则由题意得

$$\begin{cases} ka = 16, \\ ka^4 = 54, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} k = \frac{32}{3}, \\ a = \frac{3}{2}, \end{cases}$$

所以 $y = \frac{32}{3} \left(\frac{3}{2}\right)^x, x \in \mathbf{N}^*$ 且 $x \leq 12$;

若选 $y = mx^2 + n$, 则由题意得

$$\begin{cases} m+n = 16, \\ 16m+n = 54, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} m = \frac{38}{15}, \\ n = \frac{202}{15}, \end{cases}$$

所以 $y = \frac{38}{15}x^2 + \frac{202}{15}, x \in \mathbf{N}^*$ 且 $x \leq 12$.

(2) 若用 $y = \frac{32}{3} \left(\frac{3}{2}\right)^x, x \in \mathbf{N}^*$ 且 $x \leq 12$,

当 $x=5$ 时, $y=81$.

若用 $y = \frac{38}{15}x^2 + \frac{202}{15}, x \in \mathbf{N}^*$ 且 $x \leq 12$,

当 $x=5$ 时, $y=76.8$.

所以用模型 $y = \frac{32}{3} \left(\frac{3}{2}\right)^x, x \in \mathbf{N}^*$ 且 $x \leq$

12 更合适.

4.2.2 指数函数的图象和性质



对点上分

1. D 【解析】对于函数 $f(x) = a^{x+1} - 4 (a > 1)$, 令 $x+1=0$, 得 $x=-1$.

当 $x=-1$ 时, $f(-1) = a^{-1+1} - 4 = a^0 - 4 = 1 - 4 = -3$.

所以函数 $f(x) = a^{x+1} - 4 (a > 1)$ 的图象恒过定点 $(-1, -3)$. 故选 D.

2. A 【解析】由图可得函数在定义域 \mathbf{R} 上

单调递增, 因为 $y = 2^{-x} - 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1, y =$

$2^{-x-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$ 在定义域 \mathbf{R} 上单调递减,

故排除 C, D;

当 $x=0$ 时 $y=0$, 显然 $y = 2^{x-1}$ 不过点 $(0, 0)$, 故 B 错误;

$y = 2^x - 1$ 在定义域 \mathbf{R} 上单调递增, 且 $2^x > 0$, 所以 $y = 2^x - 1 > -1$, 符合题意, 故 A 正

确. 故选 A.

3. C 【解析】将函数 $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$

向右平移 $\frac{1}{2}$ 个单位长度, 得 $y =$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2\left(x-\frac{1}{2}\right)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1}. \text{ 故选 C.}$$

4. C



攻略上分

作直线 $x=1$, 利用“大招攻略 29: 竖线与口诀, 秒断指数函数图象”即可快速求解.

【解析】作直线 $x=1$ (图略), 其与四个函数图象的交点的纵坐标从上到下依次为 c, d, a, b , 则有 $c > d > a > b$.

由 $\sqrt{3} > \frac{5}{4} > \frac{1}{2} > \frac{1}{3}$, 知 a, b, c, d 的值分别是 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \sqrt{3}, \frac{5}{4}$. 故 C 正确.

5. A 【解析】因为 $y = \left(\frac{b}{a}\right)^x$ 为指数函数,

所以 $\frac{b}{a} > 0$, 且 $\frac{b}{a} \neq 1$, 所以 $-\frac{b}{2a} < 0$, 所以排除 B, D.

由指数函数的图象可知 $0 < \frac{b}{a} < 1$, 所以

$-\frac{1}{2} < -\frac{b}{2a} < 0$, 所以二次函数图象顶点的

横坐标在区间 $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ 内, 所以 C 错误. 故选 A.

6. C 【解析】根据题意, 令 $8 - 2^x \geq 0$, 即 $2^x \leq 8 = 2^3$, 解得 $x \leq 3$. 故选 C.

7. B 【解析】令 $u(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \in [0, +\infty)$, 则 $f(x)$ 为由 $y = 2^{u(x)}$ 和 $u(x) = x^2 - 2x + 1$ 构成的复合函数.

由二次函数性质得 $u(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递减, 由指数函数性质得 y 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递增, 所以由复合函数性质得 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递减, 而 $u(x) \in [0, +\infty)$, 故 $f(x) \in [1, +\infty)$. 故选 B.

8. A



攻略上分

此题中可将 a, b 变为同底的指数, 并结合中间值法比较大小, 具体可见“通法攻略 30: 指数幂比较大小”.

【解析】 $b = 9^{0.2} = 3^{0.4}$, 因为 $y = 3^x$ 在 \mathbf{R} 上



单调递增,且 $0.5 > 0.4$, 所以 $3^{0.5} > 3^{0.4} > 1$,

即 $a > b > 1$, 又 $0 < \left(\frac{1}{2}\right)^{0.4} < 1$, 所以 $a > b > 1 > c$. 故选 A.

9. C 【解析】由题意得 $2^{x^2+1} \leq 2^{2ax-3}$, 即 $x^2 + 1 \leq 2ax - 3$, 则 $x^2 - 2ax + 4 \leq 0$ 对任意

$x \in [3, 4]$ 恒成立, 所以 $a \geq \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$

在 $x \in [3, 4]$ 上恒成立, 即 $a \geq \left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x}\right)_{\max}$.

对于 $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$, 由对勾函数性质可知,

其在 $x \in [3, 4]$ 上单调递增, 则

$\left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x}\right)_{\max} = \frac{5}{2}$, 所以 $a \geq \frac{5}{2}$. 故选 C.

10. C 【解析】根据指数函数的单调性可得, 函数 $y = 2^x$, $y = 3^x - m$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, 要使 $f(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增, 只需 $3^1 - m \geq 2^1$, 则 $m \leq 1$.

又因为 $f(2m+1) > f(m-1)$, 则

$$\begin{cases} 2m+1 > m-1, \\ m-1 > -1, \end{cases} \text{ 即 } m > 0, \text{ 所以 } m \in (0, 1].$$

故选 C.

11. A 【解析】由函数 $f(x) = 3^x + b$ 的图象经过第一、三、四象限, 可得 $b < -1$, 所以

$$g(b) = f(b) - f(b-1) = 3^b - 3^{b-1} = 3^b \cdot$$

$$\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} \cdot 3^b < \frac{2}{3} \cdot 3^{-1} = \frac{2}{9}.$$

又因为 $\frac{2}{3} \cdot 3^b > 0$, 所以 $g(b) > 0$, 则

$g(b) = f(b) - f(b-1)$ 的取值范围为 $\left(0, \frac{2}{9}\right)$. 故 A 正确.

12. D 【解析】当 $a > 1$ 时, 指数函数 $f(x) = a^x$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, 且递增幅度比一次函数快, 又 $g(0) = 5 > 1$, 所以指数函数 $f(x) = a^x$ 的图象和函数 $g(x) = 3x + 5 (x \geq -1)$ 的图象一定会相交;

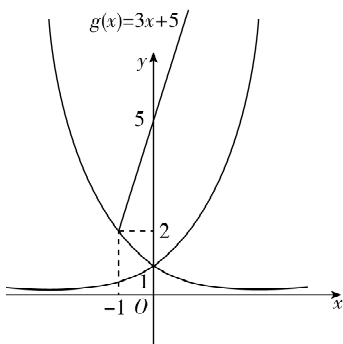
当 $0 < a < 1$ 时, 指数函数 $f(x) = a^x$ 在 \mathbf{R} 上单调递减, 所以只需 $a^{-1} \geq g(-1) =$

$$3 \times (-1) + 5 = 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \text{ 即可, 则 } 0 <$$

$$a \leq \frac{1}{2}.$$



综上, a 的取值范围为 $\left(0, \frac{1}{2}\right] \cup (1, +\infty)$. 故 D 正确.



13. ACD 【解析】 $f(x) = \frac{1+4^x}{2^x} = 2^{-x} + 2^x$, 其

定义域为 \mathbf{R} , 定义域关于原点对称, 且 $f(-x) = 2^x + 2^{-x} = f(x)$, 所以 $f(x)$ 是偶函数, 故 A 正确, B 错误;

任取 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$, 则

$$f(x_1) - f(x_2) = 2^{-x_1} + 2^{x_1} - (2^{-x_2} + 2^{x_2})$$

$$= 2^{x_1} - 2^{x_2} + 2^{-x_1} - 2^{-x_2}$$

$$= 2^{x_1} - 2^{x_2} + \frac{1}{2^{x_1}} - \frac{1}{2^{x_2}}$$

$$= 2^{x_1} - 2^{x_2} + \frac{2^{x_2} - 2^{x_1}}{2^{x_1} \cdot 2^{x_2}}$$

$$= (2^{x_1} - 2^{x_2}) \left(1 - \frac{1}{2^{x_1} \cdot 2^{x_2}} \right)$$

$$= (2^{x_1} - 2^{x_2}) \left(\frac{2^{x_1} \cdot 2^{x_2} - 1}{2^{x_1} \cdot 2^{x_2}} \right).$$

因为 $0 < x_1 < x_2$, 所以 $2^{x_1} - 2^{x_2} < 0$, $2^{x_1} \cdot$

$2^{x_2} = 2^{x_1+x_2} > 2^0 = 1$, 所以 $f(x_1) < f(x_2)$, 所

以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 故 C 正确;

$f(x) = 2^{-x} + 2^x \geq 2\sqrt{2^{-x} \cdot 2^x} = 2$, 当且仅

当 $2^{-x} = 2^x$, 即 $x = 0$ 时取等号, 所以 $f(x)$

的值域为 $[2, +\infty)$, 故 D 正确. 故选 ACD.

14. AB 【解析】因为函数 $f(x) =$

$a\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|} + b$ 的图象过原点, 所以 $0 =$

$a\left(\frac{1}{2}\right)^0 + b$, 即 $a + b = 0$. 因为 $f(x)$ 的图

象无限接近直线 $y = 2$ 但又不与该直线相交, 所以 $b = 2$, $a = -2$, 所以 $ab =$

-4 , $f(x) = -2\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|} + 2$, A 正确.

函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 定义域关于



原点对称, $f(-x) = -2\left(\frac{1}{2}\right)^{|-x|} + 2 = -2\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|} + 2 = f(x)$, 所以函数 $f(x)$ 为偶函数. 当 $x > 0$ 时, $f(x) = -2\left(\frac{1}{2}\right)^x + 2$, 函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 所以函数 $f(x) = -2\left(\frac{1}{2}\right)^x + 2$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增. 若 $f(x) = f(y)$, 则 $f(|x|) = f(|y|)$, 故 $|x| = |y|$, 又 $x \neq y$, 则 $x + y = 0$, B 正确.

若 $f(x+1) > f(2x-1)$, 则 $f(|x+1|) > f(|2x-1|)$, 所以 $|x+1| > |2x-1|$, 所以 $x^2 + 2x + 1 > 4x^2 - 4x + 1$, 所以 $x^2 - 2x < 0$, 所以 x 的取值范围为 $(0, 2)$, C 错误.

因为 $f(x) = -2\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|} + 2$, 所以 $f(-1) = 1, f(1) = 1, f\left(\frac{-1+1}{2}\right) = f(0) = 0$, 所以 $f\left(\frac{-1+1}{2}\right) = f(0) < \frac{f(-1)+f(1)}{2}$, 即当 $x_1 = -1, x_2 = 1$ 时, $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, D 错误. 故选 AB.

15. $(-\infty, 1]$ 【解析】原不等式等价于 $1 -$

$\left(\frac{3}{14}\right)^x - \left(\frac{2}{7}\right)^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 0$, 令 $f(x) = 1 - \left(\frac{3}{14}\right)^x - \left(\frac{2}{7}\right)^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x$, 则 $f(1) = 0$, 所以原不等式等价于 $f(x) \leq f(1)$.

因为 $y = \left(\frac{3}{14}\right)^x, y = \left(\frac{2}{7}\right)^x$ 和 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 分别在 \mathbf{R} 上单调递减, 所以函数 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, 所以 $x \leq 1$, 所以原不等式的解集为 $(-\infty, 1]$.

16. 2 025 【解析】函数 $f(x) =$

$\left(\frac{2^x-1}{2^x+1}\right)x^2 + x + 1$ 的定义域为 \mathbf{R} , 且

$$f(-x) + f(x) = \left(\frac{2^{-x}-1}{2^{-x}+1}\right)x^2 - x + 1 +$$

$$\left(\frac{2^x-1}{2^x+1}\right)x^2 + x + 1 = \left(\frac{1-2^x}{2^x+1}\right)x^2 +$$

$$\left(\frac{2^x-1}{2^x+1}\right)x^2 + 2 = 2, f(0) = 1, \text{ 所以}$$

$$f(-1\ 012) + f(-1\ 011) + \cdots + f(-1) + f(0) + f(1) + \cdots + f(1\ 011) + f(1\ 012) =$$



$$2 \times 1\,012 + 1 = 2\,025.$$

17. (1) 【解】因为函数 $f(x) = \frac{a \cdot 3^x - 1}{3^x + 1}$ 为奇

函数, 定义域为 \mathbf{R} , 所以 $f(0) = \frac{a-1}{1+1} = 0$,

即 $a = 1$.

此时 $f(x) = \frac{3^x - 1}{3^x + 1}$, 则 $f(-x) = \frac{3^{-x} - 1}{3^{-x} + 1} =$

$\frac{1-3^x}{1+3^x} = -f(x)$, 满足题意, 所以 $a = 1$.

(2) 【证明】由 (1) 知, $f(x) = \frac{3^x - 1}{3^x + 1} =$

$$\frac{3^x + 1 - 2}{3^x + 1} = 1 - \frac{2}{3^x + 1}.$$

任取 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 且 $x_1 < x_2$, 则

$$f(x_1) - f(x_2) = 1 - \frac{2}{3^{x_1} + 1} - 1 + \frac{2}{3^{x_2} + 1}$$

$$= \frac{2}{3^{x_2} + 1} - \frac{2}{3^{x_1} + 1}$$

$$= \frac{2(3^{x_1} + 1 - 3^{x_2} - 1)}{(3^{x_1} + 1)(3^{x_2} + 1)}$$

$$= \frac{2(3^{x_1} - 3^{x_2})}{(3^{x_1} + 1)(3^{x_2} + 1)},$$

因为 $x_1 < x_2$, 则 $3^{x_1} - 3^{x_2} < 0$, $(3^{x_1} + 1)(3^{x_2} + 1) > 0$, 所以 $f(x_1) - f(x_2) < 0$, 即 $f(x_1) < f(x_2)$, 所以 $y = f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增.

(3) 由 $f(k \cdot 4^x - 3) + f(2^x) > 0$, 得 $f(k \cdot 4^x - 3) > -f(2^x) = f(-2^x)$.

因为函数 $y = f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, 所

以 $k \cdot 4^x - 3 > -2^x$, 即 $k > \frac{3}{4^x} - \frac{1}{2^x}$.

由题意, 存在实数 $x \in [1, 3]$, 使得 $k >$

$\frac{3}{4^x} - \frac{1}{2^x}$ 成立, 则 $k > \left(\frac{3}{4^x} - \frac{1}{2^x} \right)_{\min}$.

令 $t = \frac{1}{2^x} \left(\frac{1}{8} \leq t \leq \frac{1}{2} \right)$, 则 $k > (3t^2 -$

$t)_{\min}$, 当 $t = \frac{1}{6}$ 时, 有 $(3t^2 - t)_{\min} = -\frac{1}{12}$,

即 $k > -\frac{1}{12}$, 所以 k 的取值范围

为 $\left(-\frac{1}{12}, +\infty \right)$.



能力上分

1. A 【解析】 \because 函数 $y = a^x$ 在 $[-1, 2]$ 上的值域为 $[3^m, 9]$.

当 $0 < a < 1$ 时, $y = a^x$ 在 $[-1, 2]$ 上单调递

减, 则 $a^{-1} = 9$, 解得 $a = \frac{1}{9}$, 则 $3^m = a^2 = \frac{1}{81}$, 得 $m = -4$;

当 $a > 1$ 时, $y = a^x$ 在 $[-1, 2]$ 上单调递增, 则 $a^2 = 9$, 解得 $a = 3$ 或 -3 (舍去), 则 $3^m = a^{-1} = \frac{1}{3}$, 得 $m = -1$.

综上, $m = -4$ 或 -1 . 故选 A.

2. B 【解析】函数 $f(x) = x(e^{-x} - e^x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , $f(-x) = -x(e^x - e^{-x}) = f(x)$,

因此函数 $f(x)$ 是偶函数, 其图象关于 y 轴对称, 排除 A, C;

当 $x > 0$ 时, $0 < e^{-x} < 1 < e^x$, 则 $f(x) < 0$, 排除 D. 选项 B 符合题意. 故选 B.

3. D 【解析】因为 $f(x) = 2^{|x|+1} - \frac{1}{1+x^2}$ 的定

义域为 \mathbf{R} , 所以 $f(-x) = 2^{|-x|+1} - \frac{1}{1+(-x)^2} = 2^{|x|+1} - \frac{1}{1+x^2} = f(x)$, 所以 $f(x)$

为偶函数, 所以 $f(-\sqrt{5}) = f(\sqrt{5})$;

当 $x > 0$ 时, $f(x) = 2^{x+1} - \frac{1}{1+x^2}$, 因为函数

$y = 2^{x+1}$, $y = -\frac{1}{1+x^2}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递

增, 所以 $f(x) = 2^{x+1} - \frac{1}{1+x^2}$ 在 $(0, +\infty)$ 上

单调递增, 因为 $\sqrt{5} = 5^{0.5} > 5^{0.3} > 0.3^5$, 所以

$f(-\sqrt{5}) > f(5^{0.3}) > f(0.3^5)$. 故选 D.

4. B 【解析】若 $0 < a < 1$, 当 $x \geq 0$ 时 $f(x) = a^x + 1$, 此时 $f(x) \in (1, 2]$;

又当 $x < 0$ 时 $f(x) = -x^2 - 2ax - 2 = -(x+a)^2 + a^2 - 2 \leq a^2 - 2$, 此时 $f(x)$ 的值域不可能为 \mathbf{R} , 故舍去.

所以 $a > 1$, 则当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = a^x + 1$, 此时 $f(x) \in [2, +\infty)$;

当 $x < 0$ 时 $f(x) = -x^2 - 2ax - 2 = -(x+a)^2 + a^2 - 2 \leq a^2 - 2$.

要使 $f(x)$ 的值域为 \mathbf{R} , 则 $\begin{cases} a^2 - 2 \geq 2, \\ a > 1, \end{cases}$ 解得

$a \geq 2$, 即 a 的取值范围是 $[2, +\infty)$. 故选 B.

5. BCD 【解析】函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 定义域关于原点对称且 $f(-x) =$

$\frac{a}{2}(e^{-\frac{2x}{a}} + e^{\frac{2x}{a}}) = f(x)$, $\therefore f(x)$ 为偶函数,



故 A 错误, B 正确.

$$\because e^{\frac{2x}{a}} > 0, e^{-\frac{2x}{a}} > 0, a > 0, \therefore f(x) \geq \frac{a}{2} \times$$

$2\sqrt{e^{\frac{2x}{a}} \cdot e^{-\frac{2x}{a}}} = a$, 当且仅当 $e^{\frac{2x}{a}} = e^{-\frac{2x}{a}}$ 时, 即 $x=0$ 时取等号, 故 C 正确.

$\because a > 0, \therefore$ 函数 $y = \frac{2x}{a}$ 在定义域 \mathbf{R} 上单调递增, 又函数 $y = e^x$ 在定义域 \mathbf{R} 上单调递增, \therefore 函数 $y = e^{\frac{2x}{a}}$ 在定义域 \mathbf{R} 上单调递增, 且当 $x < 0$ 时, $0 < e^{\frac{2x}{a}} < 1$, 当 $x > 0$ 时 $e^{\frac{2x}{a}} > 1$.

又对勾函数 $y = x + \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 上单调递

减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, $\therefore f(x) =$

$$\frac{a}{2}(e^{\frac{2x}{a}} + e^{-\frac{2x}{a}}) = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{2x}{a}} + \frac{1}{e^{\frac{2x}{a}}}\right) \text{ 在 } (-\infty, 0)$$

上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 即

$f(x)$ 的单调递增区间为 $[0, +\infty)$, 故 D 正确. 故选 BCD.

6. $[-12, -3]$ 【解析】 令 $t = 2^x$, 则 $0 < t \leq 4$, 原函数可变形为 $y = t^2 - 6t - 3$ ($0 < t \leq 4$), 其图象为开口向上的抛物线, 对称轴为 $t = 3$, 所以该二次函数在 $(0, 3)$ 上单调递减, 在 $(3, 4)$ 上单调递增.

当 $t = 3$ 时, 函数取到最小值, 为 $3^2 - 6 \times 3 - 3 = -12$;

当 $t = 0$ 时, 得 $0^2 - 6 \times 0 - 3 = -3$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 2]$ 的值域为 $[-12, -3]$.

7. $(-\infty, 4)$ 【解析】 由题意可得

$$2^{4-3x} = -(4-3x) + (y+1) + 2^{y+1}, \text{ 所以 } 2^{4-3x} + (4-3x) = 2^{y+1} + (y+1).$$

令 $f(x) = 2^x + x$, 因为函数 $y = 2^x$ 和 $y = x$ 均在 \mathbf{R} 上单调递增, 所以 $f(x) = 2^x + x$ 在 \mathbf{R} 上单调递增.

又因为 $2^{4-3x} + (4-3x) = 2^{y+1} + (y+1)$ 等价于 $f(4-3x) = f(1+y)$, 所以 $4-3x = 1+y$, 即 $3x+y=3$.

因为 x, y 为正实数, 所以 $\frac{1}{x} + \frac{3}{y} = \frac{1}{3} \times$

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{3}{y}\right)(y + 3x) = \frac{1}{3} \times$$

$$\left(6 + \frac{9x}{y} + \frac{y}{x}\right) \geq \frac{1}{3} \times$$

$$\left(6 + 2\sqrt{\frac{9x}{y} \cdot \frac{y}{x}}\right) = \frac{1}{3} \times 12 = 4,$$



当且仅当 $\frac{9x}{y} = \frac{y}{x}$, 即 $x = \frac{1}{2}, y = \frac{3}{2}$ 时取

等号, 所以 $\frac{1}{x} + \frac{3}{y}$ 的最小值为 4, 所以 m 的范围为 $(-\infty, 4)$.

8. 【解】(1) 因为 $f(x)$ 是奇函数, $g(x)$ 是偶函数, 所以 $f(-x) = -f(x)$, $g(-x) = g(x)$, 则由题可得 $f(-x) + g(-x) = 2^{-x}$, 即 $-f(x) + g(x) = 2^{-x}$, ①

又 $f(x) + g(x) = 2^x$, ②

联立①②解得 $f(x) = \frac{1}{2}(2^x - 2^{-x})$,

$g(x) = \frac{1}{2}(2^x + 2^{-x})$.

(2) $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, 理由如下:

任取 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 且 $x_1 < x_2$,

$$\begin{aligned} \text{则 } f(x_1) - f(x_2) &= \frac{1}{2} \left(2^{x_1} - 2^{x_2} + \frac{1}{2^{x_2}} - \frac{1}{2^{x_1}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(2^{x_1} - 2^{x_2} + \frac{2^{x_1} - 2^{x_2}}{2^{x_1} 2^{x_2}} \right) \\ &= \frac{1}{2} (2^{x_1} - 2^{x_2}) \frac{2^{x_1+x_2} + 1}{2^{x_1+x_2}}. \end{aligned}$$

$\because x_1 < x_2, \therefore 2^{x_1} < 2^{x_2}, 2^{x_1+x_2} + 1 > 0, 2^{x_1+x_2} > 0$,

$\therefore f(x_1) - f(x_2) < 0, \therefore f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增.

(3) 依题意, $\forall x \in [1, 2], mf(x) - g(2x) \leq 0$ 恒成立, 即 $\forall x \in [1, 2], m \cdot$

$\frac{2^x - 2^{-x}}{2} - \frac{2^{2x} + 2^{-2x}}{2} \leq 0$ 恒成立, 由于

$\forall x \in [1, 2], 2^x - 2^{-x} > 0$, 故 $\forall x \in [1, 2], m \leq \frac{2^{2x} + 2^{-2x}}{2^x - 2^{-x}}$ 恒成立,

令 $t = 2^x - 2^{-x}$, 由(2)可知 $2^x - 2^{-x}$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, 因此可得 $t \in \left[\frac{3}{2}, \frac{15}{4} \right]$,

由 $t^2 = 2^{2x} + 2^{-2x} - 2$, 即 $2^{2x} + 2^{-2x} = t^2 + 2$, 得

$$\frac{2^{2x} + 2^{-2x}}{2^x - 2^{-x}} = \frac{t^2 + 2}{t} = t + \frac{2}{t}.$$

根据对勾函数的性质可知, 函数 $y = t +$

$\frac{2}{t}$ 在区间 $\left[\frac{3}{2}, \frac{15}{4} \right]$ 上单调递增, 所以

$y = t + \frac{2}{t}$ 在 $t = \frac{3}{2}$ 时取得最小值, 最小值

为 $\frac{17}{6}$. 所以 $m \leq \frac{17}{6}$, 故实数 m 的取值范

围为 $\left(-\infty, \frac{17}{6} \right]$.



4.1~4.2 节测上分

1. C 【解析】 $\sqrt[3]{(-8)^2} + \sqrt[4]{(\pi-4)^4} - 0.5^{-3} = (4^3)^{\frac{1}{3}} + |\pi-4| - \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 4+4-\pi-8 = -\pi$. 故选 C.

2. C 【解析】因为 $f(x)$ 是定义域为 \mathbf{R} 的偶函数, 所以 $a = f(-3^{\frac{1}{3}}) = f(3^{\frac{1}{3}})$,
 $b = f(9^{\frac{1}{5}})$, $c = f\left(-\left(\frac{9}{2}\right)^{\frac{2}{9}}\right) = f\left(\left(\frac{9}{2}\right)^{\frac{2}{9}}\right)$,
 因为 $9^{\frac{1}{5}} = 3^{\frac{2}{5}}$, 且 $y = 3^x$ 是 \mathbf{R} 上的增函数,
 故 $3^{\frac{2}{5}} > 3^{\frac{1}{3}}$, 又 $\left[\left(\frac{9}{2}\right)^{\frac{2}{9}}\right]^9 = \frac{81}{4} < (3^{\frac{1}{3}})^9$,
 所以 $\left(\frac{9}{2}\right)^{\frac{2}{9}} < 3^{\frac{1}{3}} < 3^{\frac{2}{5}} = 9^{\frac{1}{5}}$.
 因为 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以
 $f\left(\left(\frac{9}{2}\right)^{\frac{2}{9}}\right) < f(3^{\frac{1}{3}}) < f(9^{\frac{1}{5}})$, 所以
 $f\left(-\left(\frac{9}{2}\right)^{\frac{2}{9}}\right) < f(-3^{\frac{1}{3}}) < f(9^{\frac{1}{5}})$, 即 $c < a < b$. 故选 C.

3. D 【解析】依题意, 当 $x < 0$ 时, $y = 4^x$ 图象在 $y = 2^x$ 图象下方, 所以 A, D 在 $y = 2^x$ 图象上, B, C 在 $y = 4^x$ 图象上, 所以 $A(a, 2^a)$, $B(a, 4^a)$, $C(b, 4^b)$, $D(b, 2^b)$.
 又因为四边形 $ABCD$ 为平行四边形, 所以 $AB = CD$, 即 $2^a - 4^a = 2^b - 4^b$, 即 $2^a - 2^b = 4^a - 4^b = (2^a)^2 - (2^b)^2 = (2^a + 2^b)(2^a - 2^b)$. 又因为 $2^a - 2^b \neq 0$, 所以 $2^a + 2^b = 1$, $2^{a+1} + 2^{b+1} = 2$. 故 A, B 错误;
 由基本不等式得 $2^a + 2^b = 1 \geq 2\sqrt{2^{a+b}}$, 化简可得 $a+b \leq -2$, 当且仅当 $a = -1 = b$ 时等号成立. 由于 $a < b < 0$, 故 $a+b < -2$, D 正确, C 错误. 故选 D.

4. CD 【解析】因为 $f(x) = \frac{2^x-1}{2^x+1}$ 的定义域为 \mathbf{R} , 定义域关于原点对称, 且 $f(-x) = \frac{2^{-x}-1}{2^{-x}+1} = \frac{1-2^x}{1+2^x} = -f(x)$, 所以 $f(x)$ 是奇函数, 其图象关于原点对称, 所以 A 错误, C 正确.

对于 B, 因为 $f(x) = \frac{2^x-1}{2^x+1} = 1 - \frac{2}{2^x+1}$, 即
 $2^x = -\frac{f(x)+1}{f(x)-1} > 0$, 所以 $[f(x)+1][f(x)-1] < 0$, 所以 $f(x) \in (-1, 1)$, 故 B 错误.



对于 D, 当 $x_1 > x_2$ 时, $f(x_1) - f(x_2) = \left(1 - \frac{2}{2^{x_1}+1}\right) - \left(1 - \frac{2}{2^{x_2}+1}\right) = 2 \left(\frac{1}{2^{x_2}+1} - \frac{1}{2^{x_1}+1}\right) = \frac{2(2^{x_1}-2^{x_2})}{(2^{x_2}+1)(2^{x_1}+1)}$.

因为 $x_1 > x_2$, 所以 $2^{x_1} > 2^{x_2} > 0$, $2^{x_1}+1 > 2^{x_2}+1 > 0$, 所以 $f(x_1) - f(x_2) > 0$, 所以 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} > 0$;

当 $x_1 < x_2$ 时, 同理可得 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} > 0$.

综上, $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 且 $x_1 \neq x_2$, $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} > 0$ 恒成立, 故 D 正确. 故选 CD.

5. $4+2\sqrt{3}$ 【解析】 因为正数 m, n 满足

$3^m \cdot 9^n = 3^m \cdot 3^{2n} = 3^{m+2n} = 9$, 所以 $m+2n =$

$2, \frac{m}{n} > 0, \frac{n}{m} > 0$, 所以 $\frac{2}{m} + \frac{3}{n} = \frac{1}{2}(m +$

$2n) \left(\frac{2}{m} + \frac{3}{n}\right) = \frac{1}{2} \left(8 + \frac{3m}{n} + \frac{4n}{m}\right) \geq$

$\frac{1}{2} \left(8 + 2\sqrt{\frac{3m}{n} \cdot \frac{4n}{m}}\right) = 4 + 2\sqrt{3}$,

当且仅当 $\begin{cases} \frac{3m}{n} = \frac{4n}{m}, \\ m+2n=2, \end{cases}$ 即 $m = \sqrt{3} - 1, n =$

$\frac{3-\sqrt{3}}{2}$ 时等号成立, 所以 $\frac{2}{m} + \frac{3}{n}$ 的最小值

为 $4+2\sqrt{3}$.

6. 40 【解析】 由题设, 得 $\begin{cases} e^{10a+b} = 0.2, \\ e^{20a+b} = 0.4, \end{cases}$

可得 $\begin{cases} e^a = 2^{\frac{1}{10}}, \\ e^b = 0.1, \end{cases}$ 令 $e^{at+b} = 0.1 \times 2^{\frac{t}{10}} = 1.6$, 可

得 $t = 40$.

该液体在环境温度为 40°C 时的蒸发速度为 1.6 L/h .

7. $(0, +\infty)$ 【解析】 结合题意可知, 若 $x >$

0 , 则 $-x < 0$, 所以 $f(-x) = -2^{-x} - 3^{-x} =$

$-\frac{1}{2^x} - \frac{1}{3^x}$, 因为 $y = f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的

奇函数, 所以 $x > 0$ 时, $f(x) = -f(-x) =$

$\frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x}, f(0) = 0$,

所以 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x}, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -2^x - 3^x, & x < 0, \end{cases}$



当 $x < 0$ 时, $f(x) = -2^x - 3^x < 0$, 而 $\frac{2}{5^x} > 0$, 此时不满足 $f(x) > \frac{2}{5^x}$;

当 $x = 0$ 时, $f(x) = 0$, 而 $\frac{2}{5^x} > 0$, 此时不满足 $f(x) > \frac{2}{5^x}$;

当 $x > 0$ 时, 要使 $f(x) > \frac{2}{5^x}$, 只需 $\frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} > \frac{2}{5^x}$, 即 $\left(\frac{5}{2}\right)^x + \left(\frac{5}{3}\right)^x > 2$, 令 $g(x) = \left(\frac{5}{2}\right)^x + \left(\frac{5}{3}\right)^x$, 则 $g(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, 且 $g(0) = \left(\frac{5}{2}\right)^0 + \left(\frac{5}{3}\right)^0 = 2$, 而 $\left(\frac{5}{2}\right)^x + \left(\frac{5}{3}\right)^x > 2$, 所以 $g(x) > g(0)$, 解得 $x \in (0, +\infty)$.

综上, $f(x) > \frac{2}{5^x}$ 的解集为 $(0, +\infty)$.

8. 【解】 (1) 由 $a = \frac{1}{2}$, 得 $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$, $f(-x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} - \left(\frac{1}{2}\right)^x = -f(x)$, 又 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 所以 $f(x)$ 是奇函数.

因为 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在 \mathbf{R} 上单调递减, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, 所以 $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$ 在 \mathbf{R} 上单调递减, 所以 $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$ 是奇函数且在 \mathbf{R} 上单调递减, 所以不等式 $f(x^2 - tx) + f(1 - x) < 0$, 可变为 $f(x^2 - tx) < f(x - 1)$, 则 $x^2 - tx > x - 1$, 即 $x^2 - (t + 1)x + 1 > 0$ 对 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 所以 $\Delta = (t + 1)^2 - 4 < 0$, 即 $(t + 3)(t - 1) < 0$, 解得 $-3 < t < 1$, 故 t 的取值范围是 $(-3, 1)$.

(2) 由 $f(1) = a - a^{-1} = \frac{3}{2}$, 得 $2a^2 - 3a - 2 = 0$, 解得 $a = 2$ 或 $a = -\frac{1}{2}$ (舍), 所以 $f(x) = 2^x - 2^{-x}$, 且 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, 则 $g(x) = 2^{2x} + 2^{-2x} - m(2^x - 2^{-x}) = (2^x - 2^{-x})^2 - m(2^x - 2^{-x}) + 2$.

令 $2^x - 2^{-x} = t$, 则当 $x \geq 1$ 时, $t = 2^x - 2^{-x} \geq$



$$2 - 2^{-1} = \frac{3}{2}.$$

$$\text{令 } h(t) = t^2 - mt + 2 = \left(t - \frac{m}{2}\right)^2 + 2 - \frac{m^2}{4},$$

$$t \geq \frac{3}{2},$$

则①当 $\frac{m}{2} \leq \frac{3}{2}$ 即 $m \leq 3$ 时, $g(x)_{\min} =$

$$h\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{17}{4} - \frac{3}{2}m = -2, \text{ 解得 } m = \frac{25}{6},$$

又 $m \leq 3$, 故舍去;

②当 $\frac{m}{2} > \frac{3}{2}$ 即 $m > 3$ 时, $g(x)_{\min} =$

$$h\left(\frac{m}{2}\right) = 2 - \frac{m^2}{4} = -2, \text{ 解得 } m = 4 \text{ (负值舍去)}$$

符合题意, 所以 $m = 4$.

综上所述, m 的值为 4.

4.3 对数

4.3.1 对数的概念+

4.3.2 对数的运算



对点上分

1. D 【解析】由题可得 $x^2 - 2x - 3 > 0$, 解得 $x < -1$ 或 $x > 3$, 故实数 x 的取值范围为 $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$. 故选 D.

规律点拨

对数有意义的条件是真数大于 0, 底数大于 0 且不等于 1. 若底数中也含有字母, 不要忽略底数的限制条件.

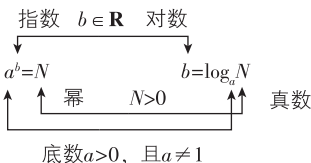
2. 0 【解析】由题意知, $f(-1) = f(-1 + 2) = f(1) = \log_2 1 = 0$.

3. $\frac{4}{3}$ 【解析】由已知得 $a^{2m} = 2, a^n = 3$, 则

$$a^{4m} = 4, \text{ 故 } a^{4m-n} = \frac{a^{4m}}{a^n} = \frac{4}{3}.$$

规律点拨

指对互化



4. B



攻略上分

式中第三、四项可直接得结果, 前两项是同底数的对数相加, 利用通法攻略 31 中的对数化简求值的常用技巧直接转化.

【解析】 $\lg 2 + \lg 5 + 4^{\frac{1}{2}} - (1 - \sqrt{2})^0 = \lg(2 \times$



5) $+2-1=2$, 故选 B.

5. B 【解析】原式 $= \frac{\lg 4}{\lg 5} \times \frac{\lg 25}{\lg 16} = \frac{2\lg 2}{\lg 5} \times \frac{2\lg 5}{4\lg 2} = 1$. 故 B 正确.

6. D



攻略上分

求 $x+2y$, 需要将 x, y 都表示成对数形式, 因为底数不同, 所以需要利用通法攻略 32 中的换底公式的推论求解.

【解析】由 $2^x = 6$, 可得 $x = \log_2 6$.

因为 $y = \log_4 \frac{8}{3}$, 所以 $x + 2y = \log_2 6 +$

$$2 \log_4 \frac{8}{3} = \log_2 6 + \log_2 \frac{8}{3} = \log_2 \left(6 \times \frac{8}{3} \right) =$$

$\log_2 16 = 4$. 故选 D.

7. B 【解析】因为 $a = \frac{1}{2} \lg 500 - \lg \sqrt{5}$, $b = \lg_4 5$, 所以 $a + 2^b = \lg 10 \sqrt{5} - \lg \sqrt{5} + 4^{\frac{1}{2} \lg_4 5} = \lg 10 + 4^{\lg_4 \sqrt{5}} = 1 + \sqrt{5}$. 故 B 正确.

8. ACD



攻略上分

由已知可得 $a = \lg 5$, $b = \lg 20$, 参照通法攻略 31 和 32, 利用对数的运算性质和换底公式逐个分析判断即可.

【解析】因为 $10^a = 5$, $10^b = 20$, 所以 $a = \lg 5$, $b = \lg 20$.

对于 A, $a+b = \lg 5 + \lg 20 = \lg 100 = 2$, 所以 A 正确;

对于 B, $b-a = \lg 20 - \lg 5 = \lg 4 \neq \lg 5$, 所以 B 错误;

对于 C, $ab - 2(\lg 5)^2 = \lg 20 \cdot \lg 5 -$

$$2(\lg 5)^2 = \lg 5 \cdot \lg \frac{4}{5}, \text{ 当 } x < 0 \text{ 时, } 10^x < 1,$$

当 $x > 0$ 时, $10^x > 1$, 所以 $\lg \frac{4}{5} < 0$, $\lg 5 > 0$,

故 $ab < 2(\lg 5)^2$, 所以 C 正确;

$$\text{对于 D, } \log_{25} 8 = \frac{\lg 8}{\lg 25} = \frac{3\lg 2}{2\lg 5} =$$

$$\frac{3(\lg 20 - \lg 10)}{2\lg 5} = \frac{3(b-1)}{2a} = \frac{3b-3}{2a}, \text{ 所以 D}$$

正确. 故选 ACD.

9. D 【解析】原式 $= \left(\frac{\lg 5^3}{\lg 2} + \frac{\lg 5^2}{\lg 2^2} + \frac{\lg 5}{\lg 2^3} \right) \cdot$



$$\left(\frac{\lg 2}{\lg 5} + \frac{\lg 2^2}{\lg 5^2} + \frac{\lg 2^3}{\lg 5^3}\right) = \left(3 + 1 + \frac{1}{3}\right) \frac{\lg 5}{\lg 2}.$$

$$3 \frac{\lg 2}{\lg 5} = 13. \text{ 故选 D.}$$

10. C



攻略上分

先根据指对互化求出 ab , 再参照通法攻略 32, 根据换底公式的推论转化 $\log_{ab} x = \frac{1}{\log_x ab}$, 再根据 $\log_a a^b = b$ 求解即可. 也可以直接利用换底公式的推论依次表示出 $\log_x a$, $\log_x b$, $\log_x ab$, $\log_{ab} x$.

【解析】由 $\log_a x = 3$, $\log_b x = 4$, 得 $a^3 = x$,

$b^4 = x$, 即 $a = x^{\frac{1}{3}}$, $b = x^{\frac{1}{4}}$, 所以 $ab = x^{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}$.

$$x^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{7}{12}}, \text{ 所以 } \log_{ab} x = \frac{1}{\log_x ab} = \frac{1}{\log_x x^{\frac{7}{12}}} =$$

$$\frac{12}{7}. \text{ 故选 C.}$$

一题多解

因为 $\log_a x = 3$, $\log_b x = 4$, 所

$$\text{以 } x > 0 \text{ 且 } x \neq 1, \log_x a = \frac{1}{3}, \log_x b = \frac{1}{4},$$

$$\text{所以 } \log_x ab = \log_x a + \log_x b = \frac{7}{12}, \text{ 则}$$

$$\log_{ab} x = \frac{1}{\log_x ab} = \frac{12}{7}. \text{ 故选 C.}$$

11. A 【解析】因为 $2^a = 5^b = m (m > 0)$, 所

$$\text{以 } a = \log_2 m, b = \log_5 m, \text{ 所以 } \frac{1}{a} = \log_m 2,$$

$$\frac{1}{b} = \log_m 5, \text{ 所以 } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \log_m 2 + \log_m 5 =$$

$$\log_m 10 = 2, \text{ 所以 } m = \sqrt{10}. \text{ 故选 A.}$$

12. B 【解析】由题意得, $\log_{30} 18 = \frac{\lg 18}{\lg 30} =$

$$\frac{\lg 2 + \lg 9}{\lg 3 + \lg 10} = \frac{\lg 2 + 2\lg 3}{\lg 3 + 1} = \frac{a + 2b}{b + 1}. \text{ 故选 B.}$$

13. C 【解析】由题可得 $15 = 15 \ln \frac{100 - 20}{w - 20}$,

$$\text{得 } \frac{80}{w - 20} = e, \text{ 即 } w = 20 + \frac{80}{e} \approx 20 + \frac{80}{2.72} \approx$$

$$49.41. \text{ 故选 C.}$$

14. 16 【解析】因为 $\log_2 a - 2\log_a 4 = \log_2 a -$

$$4\log_a 2 = 3, \text{ 且 } a > 1, \text{ 令 } t = \log_2 a > 0, \text{ 则}$$

$$\log_a 2 = \frac{1}{t}, \text{ 可得 } t - \frac{4}{t} = 3, \text{ 整理可得 } t^2 -$$

$$3t - 4 = 0, \text{ 解得 } t = 4 \text{ 或 } t = -1 (\text{舍去}), \text{ 即}$$

$$\log_2 a = 4, \text{ 所以 } a = 16.$$



能力上分

1. D 【解析】由题意得 $\log_8 5 = b$, 则 $8^b = 5$,

即 $2^{3b} = 5$, 于是 $2^{a-3b} = \frac{2^a}{2^{3b}} = \frac{3}{5}$, 则

$4^{a-3b} = (2^{a-3b})^2 = \frac{9}{25}$. 故选 D.

2. B 【解析】原式 $= (\log_2 3 + \log_3 3) \times$

$(\log_3 2 + \log_3 2) - \log_2 2^{\frac{5}{4}}$

$= \left(\frac{1}{2} \log_2 3 + \frac{1}{3} \log_2 3 \right) \times \left(\log_3 2 + \frac{1}{2} \log_3 2 \right) - \frac{5}{4}$

$= \frac{5}{6} \log_2 3 \times \frac{3}{2} \log_3 2 - \frac{5}{4}$

$= \frac{5}{4} \times \frac{\lg 3}{\lg 2} \times \frac{\lg 2}{\lg 3} - \frac{5}{4} = 0$.

故选 B.

3. A 【解析】 $\frac{a+1}{a-1} = 1 + \frac{2}{a-1} = 2 + \log_{\frac{3}{2}} 6$, 则

$\frac{2}{a-1} = 1 + \log_{\frac{3}{2}} 6 = \log_{\frac{3}{2}} \frac{3}{2} + \log_{\frac{3}{2}} 6 = 2 \log_{\frac{3}{2}} 3$,

得 $a = \frac{1 + \log_{\frac{3}{2}} 3}{\log_{\frac{3}{2}} 3} = \frac{\log_{\frac{3}{2}} \frac{9}{2}}{\log_{\frac{3}{2}} 3} = \log_3 \frac{9}{2}$. 故

选 A.

4. B 【解析】 $8^{\frac{2}{3}} + 8^{\log_2 3} = (2^3)^{\frac{2}{3}} + 2^{\log_2 3^3} = 4 + 27 = 31$, 故①错误;

$\frac{\lg 6}{\lg \frac{3}{5}} + \ln e^2 = \frac{\lg 2 + \lg 3}{\lg 3 - \lg 5} + 2 = \frac{1 - \lg 5 + \lg 3}{\lg 3 - \lg 5} + 2$

$2, \because \frac{1 - \lg 5 + \lg 3}{\lg 3 - \lg 5} \neq 1, \therefore \frac{\lg 6}{\lg \frac{3}{5}} + \ln e^2 =$

$\frac{1 - \lg 5 + \lg 3}{\lg 3 - \lg 5} + 2 \neq 3$, 故②错误;

$\log_2 3 \cdot \log_3 4 = \log_2 4 = 2$, 故③正确;

$\left(\frac{9}{3^{\sqrt{2}}} \right)^{2+\sqrt{2}} = \left(\frac{3^2}{3^{\sqrt{2}}} \right)^{2+\sqrt{2}} = (3^{2-\sqrt{2}})^{2+\sqrt{2}} = 3^2 =$

9, 故④正确. 故选 B.

5. B 【解析】设大约经过 n 天, “进步值”大约是“退步值”的 100 倍. 此时进步值为 $(1 + 1\%)^n = 1.01^n$, 退步值为 $(1 -$

$1\%)^n = 0.99^n$, 即 $\frac{1.01^n}{0.99^n} = 100$, 则 $n =$

$\log_{\frac{101}{99}} 100 = \frac{\lg 100}{\lg 101 - \lg 99} \approx$

$\frac{2}{2.0043 - 1.9956} \approx 230$. 故选 B.



6. D 【解析】 $\because f(x)$ 是奇函数,

$$\therefore f(2-x) = -f(x-2), \text{ 又 } f(2-x) = f(x),$$

$$\therefore f(x) = -f(x-2) = -[-f(x-2-2)] = f(x-4), \therefore f(x) \text{ 是以 } 4 \text{ 为周期的函数.}$$

$$f(2 + \log_2 2024) = f(2 + \log_2 (2^3 \times 253)) = f(5 + \log_2 253),$$

$$\text{又 } \because 2^8 = 256, 2^7 = 128, \text{ 则 } 12 < 5 + \log_2 253 < 13, 0 < 5 + \log_2 253 - 12 < 1.$$

又 $f(x)$ 是以 4 为周期的函数, 故 $f(5 +$

$$\log_2 253 - 3 \times 4) = 2^{\log_2 253 - 7} = \frac{253}{128}. \text{ 故选 D.}$$

7. A 【解析】依题意, $\log_2 4a = \log_3 3b =$

$$\log_6 (12a + 12b), \text{ 则 } \log_6 (12a + 12b) =$$

$$\frac{\log_6 4a}{\log_6 2} = \frac{\log_6 3b}{\log_6 3} = \frac{\log_6 4a + \log_6 3b}{\log_6 2 + \log_6 3} = \log_6 12ab,$$

因此 $12a + 12b = 12ab, a + b = ab$, 所以

$$\frac{\lg(a+b)}{\lg(ab)} = 1. \text{ 故选 A.}$$

8. B 【解析】 $\because f(x) = \log_3 \frac{x}{3} \cdot$

$$\log_3 \frac{x}{27} = (\log_3 x - 1)(\log_3 x - 3) =$$

$$(\log_3 x)^2 - 4 \log_3 x + 3, f(x_1) = f(x_2),$$

且 $x_1 \neq x_2, \therefore \log_3 x_1 + \log_3 x_2 = 4$, 即

$$x_1 \cdot x_2 = 81, \therefore \frac{9}{x_1} + \frac{1}{x_2} \geq 2 \sqrt{\frac{9}{x_1 x_2}} = 2 \times$$

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{3}, \text{ 当且仅当 } \frac{9}{x_1} = \frac{1}{x_2}, \text{ 即 } x_1 =$$

$$27, x_2 = 3 \text{ 时等号成立. 故 } \frac{9}{x_1} + \frac{1}{x_2} \text{ 的最小}$$

$$\text{值为 } \frac{2}{3}, \text{ 故选 B.}$$

9. B 【解析】 $P_{10}(k) + P_{10}(k+1) + \cdots +$

$$P_{10}(14) = \lg \frac{k+1}{k} + \lg \frac{k+2}{k+1} + \cdots + \lg \frac{15}{14} =$$

$$\lg \frac{15}{k}, \text{ 而 } \frac{\log_2 9 - \log_2 3}{1 + \log_2 5} = \frac{\log_2 3}{\log_2 10} = \lg 3, \text{ 故}$$

$$\lg \frac{15}{k} = \lg 3, \text{ 即 } k = 5, \text{ 故选 B.}$$

10. A 【解析】因为 $\log_{\sqrt{3}}(3m) + \log_3 n =$

$$\log_3 (9m^2) + \log_3 n = \log_3 (9m^2 n) =$$

$$\log_{\sqrt{3}} (2m^2 + n) = \log_3 (2m^2 + n)^2, \text{ 所以}$$

$$9m^2 n = (2m^2 + n)^2, \text{ 化简得 } 4m^4 - 5m^2 n +$$

$$n^2 = 0, \text{ 即 } (4m^2 - n)(m^2 - n) = 0, \text{ 解得}$$

$$4m^2 = n \text{ 或 } m^2 = n.$$

$$\text{又 } \log_2 m - \log_4 n = \log_4 m^2 - \log_4 n = \log_4 \frac{m^2}{n}.$$



故当 $4m^2 = n$ 时, $\log_2 m - \log_4 n = \log_4 \frac{1}{4} = -1$; 当 $m^2 = n$ 时, $\log_2 m - \log_4 n = \log_4 1 = 0$.

综上, $\log_2 m - \log_4 n$ 的值为 -1 或 0 . 故选 A.

11. (1) 【证明】令 $3^a = 4^b = 6^c = t (t > 1)$,

则 $a = \log_3 t, b = \log_4 t, c = \log_6 t$.

所以 $\frac{2}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{\log_3 t} + \frac{1}{\log_4 t} = \frac{2 \lg 3}{\lg t} + \frac{\lg 4}{\lg t} = \frac{\lg(3^2 \times 4)}{\lg t} = \frac{\lg 36}{\lg t}$, $\frac{2}{c} = \frac{2}{\log_6 t} = \frac{2 \lg 6}{\lg t} = \frac{\lg 36}{\lg t}$, 故 $\frac{2}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{c}$ 成立.

(2) 【解】由 (1) 知, $\frac{2}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{c}$, 即

$\frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{2b}$. 所以 $\frac{a+b}{c} = (a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{2b} \right) = \frac{3}{2} + \frac{b}{a} + \frac{a}{2b} \geq \frac{3}{2} + 2\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} + \sqrt{2}$, 当且仅当 $\frac{b}{a} = \frac{a}{2b}$ 时, 即 $a = \sqrt{2}b$ 时等号成立.

由 $m^2 + \sqrt{2} \leq \frac{a+b}{c}$ 恒成立知, $m^2 + \sqrt{2} \leq$

$\left(\frac{a+b}{c} \right)_{\min} = \frac{3}{2} + \sqrt{2}$ 成立, 即 $m^2 \leq \frac{3}{2}$, 解

得 $-\frac{\sqrt{6}}{2} \leq m \leq \frac{\sqrt{6}}{2}$, 所以实数 m 的取值范

围是 $\left\{ m \mid -\frac{\sqrt{6}}{2} \leq m \leq \frac{\sqrt{6}}{2} \right\}$.

4.4 对数函数

4.4.1 对数函数的概念+

4.4.2 对数函数的图象和性质



对点上分

1. B 【解析】由于形如 $y = \log_a x (a > 0, \text{且 } a \neq 1)$ 的函数为对数函数, 故符合此形式的函数表达式有 ②③, ① $a \in \mathbf{R}$ 不符合, ④ $x+2$ 不符合, ⑤ 系数为 2 不符合, 故 B 正确.

2. 5 【解析】由对数函数的定义可知

$$\begin{cases} a^2 - 3a - 10 = 0, \\ a - 1 > 0, \\ a - 1 \neq 1, \end{cases} \quad \text{解得 } a = 5.$$

3. 1 【解析】由题设知 $\begin{cases} m-1=1, \\ \log_a 4=2, \end{cases}$ 可得



$$\begin{cases} m=2, \\ a=2, \end{cases} \text{ 故 } f(x) = \log_2 x, \text{ 所以 } f(m) =$$

$$f(2) = \log_2 2 = 1.$$

4. A 【解析】由于函数 $y = \log_{0.5} x = \log_{2^{-1}} x = -\log_2 x$, 故函数 $y = \log_{0.5} x$ 与 $y = \log_2 x$ 的图象关于 x 轴对称. 故 A 正确.

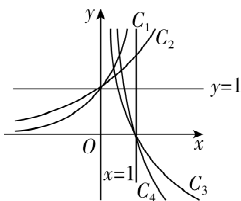
5. C



攻略上分

根据指数函数、对数函数图象判断底数的值, 可以利用大招攻略 29 和 33 解决.

【解析】随着 x 的增大, 根据 C_3, C_4 的函数值由正变为负, 可知它们是对数函数图象且底数小于 1, 画一条横线 $y=1$, 发现 C_3 与横线的交点在 C_4 与横线交点的左侧, 所以 C_3 的底数小于 C_4 的底数; 同理, 画一条竖线 $x=1$, 观察它与 C_1, C_2 的交点可得 C_1 的指数大于 C_2 的指数. 故选 C.



一题多解

曲线 C_1, C_2 是指数函数 $y = a^x$ 的图象, 且其图象在 \mathbf{R} 上单调递增, 所以 $a > 1$, 当 $x=1$ 时, C_1 的函数值大于 C_2 的函数值, 故 C_1, C_2 对应的 a 值分别为 $2, \sqrt{2}$;

曲线 C_3, C_4 是对数函数 $y = \log_a x$ 的图象, 且其图象在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 所以 C_3, C_4 对应的 a 值的取值范围为 $0 < a < 1$, 当 $x=2$ 时, C_3 的函数值大于 C_4 的函数值, 故 C_3, C_4 对应

的 a 值依次为 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$. 故选 C.

6. D 【解析】因为函数 $f(x) = \log_a(x-b)$ 在 $(b, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $0 < a < 1$. 因为函数 $f(x)$ 的图象与 x 轴的交点在 x 轴正半轴上, 所以 $x=1+b > 0$, 即 $b > -1$. 因为函数 $f(x)$ 图象与 y 轴有交点, 所以 $b < 0$, 所以 $-1 < b < 0$, 故选 D.

7. A 【解析】易知函数 $f(x) = \frac{\ln x^2}{x}$ 的定义



域为 $\{x | x \neq 0\}$, 因为 $f(-x) = \frac{\ln(-x)^2}{-x} =$

$\frac{\ln x^2}{-x} = -f(x)$, 所以函数 $f(x)$ 为奇函数,

排除 D;

又当 $x > 1$ 时, $\ln x^2 > \ln 1 = 0$, 则 $f(x) > 0$, 排除 C;

$f(2) = \frac{\ln 4}{2} = \ln 2 < 1$, 故排除 B. 故选 A.

8.9 【解析】 令 $x-1=1$, 即 $x=2$, 则 $y=4$, 所以函数 $y=\log_a(x-1)+4$ 的图象恒过定点 $P(2,4)$, 则 $f(2)=2^n=4$, 即 $n=2$, 所以 $f(x)=x^2$, 则 $f(3)=3^2=9$.

9. A 【解析】 由题意得
$$\begin{cases} 1-x \geq 0, \\ \ln x \neq 0, \\ x > 0, \end{cases}$$
 解得

$0 < x < 1$, 即函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,1)$. 故选 A.

10. D 【解析】 $f(1)=0$, 故 $f(\log_2 x) > 0 = f(1)$. 因为函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的偶函数, 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $f(|\log_2 x|) > 0 = f(1)$, 故 $|\log_2 x| > 1$, 即 $\log_2 x > 1$ 或 $\log_2 x < -1$, 解得 $x > 2$ 或 $0 < x < \frac{1}{2}$. 故 $f(\log_2 x) > 0$ 的解集为 $(0, \frac{1}{2}) \cup (2, +\infty)$. 故选 D.

11. D 【解析】 因为函数 $y = \log_{0.3} x$, $y = \log_{0.5} x$ 都是减函数, 所以 $a = \log_{0.3} 0.5 < \log_{0.3} 0.3 = 1$, $\log_{0.5} 0.5 = 1 < b = \log_{0.5} 0.3 < \log_{0.5} 0.25 = 2$. 又 $c = \frac{1}{2} \log_2 17 = \log_2 \sqrt{17} > \log_2 4 = 2$, 所以 $c > b > a$. 故选 D.

12. D 【解析】 函数 $f(x) = \log_2(x^2 - ax + 3)$ 在 $[\frac{1}{2}, 1]$ 上单调递减, 而函数 $y = \log_2 x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 则函数 $y = x^2 - ax + 3$ 在 $[\frac{1}{2}, 1]$ 上单调递减且恒大于 0, 因此
$$\begin{cases} \frac{a}{2} \geq 1, \\ 1^2 - a + 3 > 0, \end{cases}$$
 解得 $2 \leq a < 4$. 所以

实数 a 的取值范围是 $[2, 4)$. 故选 D.



易错警示 忽略对数函数的真数大于 0 致错

本题是已知对数型复合函数在某个区间上的单调性求参数的取值范围,解题时不能只考虑内层函数的单调性要求,还要牢记真数大于 0 这个要求.

13. A 【解析】由 $\left(\frac{1}{3}\right)^a < 1 = \left(\frac{1}{3}\right)^0$, 得 $a >$

0 ; 由 $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a} < 1$, 得 $0 \leq a < 1$; 所以由

$\log_a \frac{1}{3} < 1 = \log_a a$, 可得 $0 < a < \frac{1}{3}$.

综上, 实数 a 的取值范围是 $\left(0, \frac{1}{3}\right)$.

故 A 正确.

14. A 【解析】由题意得
$$\begin{cases} 3-a > 1, \\ a > 1, \\ (3-a)^1 - a \leq \log_a 1, \end{cases}$$

解得 $a \in \left[\frac{3}{2}, 2\right)$. 故选 A.

易错警示 忽略分段函数在分段处的端点值的大小关系致错

分段函数具有单调性, 要求各段函数的单调性保持一致, 同时分段处的端点值的大小关系也是确定的.

15. C 【解析】因为函数 $y = \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 函数 $y = -\frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上也单调递增, 故函数 $f(x) = \ln x -$

$\frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以只需

$1-x > 2x-1 > 0$, 得 $\frac{1}{2} < x < \frac{2}{3}$. 故选 C.

16. A 【解析】当 $a=1$ 时, $f(x) = \lg \frac{1+x}{1-x}$, 由

$\frac{1+x}{1-x} > 0$ 得 $-1 < x < 1$, 则 $f(x)$ 的定义域关

于原点对称. 又 $f(-x) = \lg \frac{1-x}{1+x} =$

$-\lg \frac{1+x}{1-x} = -f(x)$, 则 $f(x)$ 是奇函数, 故充

分性成立; 若 $f(x) = \lg \frac{a+x}{1-ax}$ 是奇函数,

则 $f(-x) + f(x) = 0$, 即 $\lg \frac{a-x}{1+ax} +$

$\lg \frac{a+x}{1-ax} = 0$. 所以 $\lg \frac{a^2-x^2}{1-a^2x^2} = 0$, 则



$\frac{a^2-x^2}{1-a^2x^2}=1$, 故 $a^2-x^2=1-a^2x^2$, 所以 $a^2=1$, 故 $a=\pm 1$, 经检验 $a=-1$ 也成立, 故不一定推得 $a=1$, 从而必要性不成立. 所以“ $a=1$ ”是“ $f(x)=\lg \frac{a+x}{1-ax}$ 是奇函数”的充分不必要条件. 故选 A.

17. $\frac{5}{2}$ 或 3 【解析】当 $0 < a < 1$ 时, $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上单调递减, 由题意有

$$\begin{cases} f(1)=b=2, \\ f(2)=\log_a 2+b=1, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a=\frac{1}{2}, \\ b=2, \end{cases} \text{ 符合}$$

题意, 此时 $a+b=\frac{5}{2}$; 当 $a > 1$ 时, $f(x)$

在 $[1, 2]$ 上单调递增, 由题意有

$$\begin{cases} f(1)=b=1, \\ f(2)=\log_a 2+b=2, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a=2, \\ b=1, \end{cases} \text{ 符合题}$$

意, 此时 $a+b=3$.

综上所述可得, $a+b$ 的值为 $\frac{5}{2}$ 或 3.

易错警示 忽略对底数含参的对数(型)函数的讨论

对数(型)函数中, 若底数中含有字母参数, 在根据已知无法明确底数的范围时, 一般分底数在 $(0, 1)$ 和 $(1, +\infty)$ 上进行讨论.

18. (1) $[0, 1)$ (2) $[0, 1]$ 【解析】(1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 即真数恒大于 0, 则 $a=0$ 或 $\begin{cases} a>0, \\ \Delta=4a^2-4a<0, \end{cases}$ 得 $0 \leq a < 1$, 所以 a 的取值范围是 $[0, 1)$.

(2) 函数 $f(x)$ 的值域为 \mathbf{R} , 即真数能取遍 $(0, +\infty)$ 上的数, 则 $a=0$ 或 $\begin{cases} a>0, \\ \Delta=4-4a \geq 0, \end{cases}$ 解得 $0 \leq a \leq 1$, 所以 a 的取值范围是 $[0, 1]$.

19. D 【解析】由于函数 $f(x)$ 的图象与函数 $y=2^x$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称, 则 $f(x)=\log_2 x$. 所以当 $x > 0$ 时, $h(x)=\log_2 x - x$, 则 $h(8)=\log_2 8 - 8 = -5$, 又 $h(x)$ 为奇函数, 所以 $h(-8)=-h(8)=5$. 故选 D.

20. B 【解析】 \because 函数 $g(x)$ 是 $f(x)=3^x$ 的反函数, $\therefore g(x)=\log_3 x$.

\therefore 正数 $x_1, x_2, \dots, x_{2022}$ 满足 $x_1 \cdot x_2 \cdot$



$$\begin{aligned} \cdots \cdot x_{2022} &= 81, \therefore g(x_1^2) + g(x_2^2) + \cdots + \\ g(x_{2021}^2) + g(x_{2022}^2) &= \log_3 x_1^2 + \log_3 x_2^2 + \cdots + \\ \log_3 x_{2022}^2 &= 2(\log_3 x_1 + \log_3 x_2 + \cdots + \\ \log_3 x_{2022}) &= 2\log_3(x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_{2022}) = \\ 2\log_3 81 &= 2\log_3 3^4 = 2 \times 4 = 8. \text{ 故 B 正确.} \end{aligned}$$



能力上分

1. B 【解析】要使 $g(x) = \frac{f(1+x)}{\ln(1-x)}$ 有意义,

$$\text{只需} \begin{cases} -1 < 1+x < 3, \\ 1-x > 0, \\ 1-x \neq 1, \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} -2 < x < 2, \\ x < 1, \\ x \neq 0, \end{cases} \quad \text{解得}$$

$-2 < x < 0$ 或 $0 < x < 1$, 则函数 $g(x)$ 的定义域为 $(-2, 0) \cup (0, 1)$. 故选 B.

2. C 【解析】对于 A, B 选项, 由函数 $y = \log_a(x+1)$ 单调递增可知 $a > 1$, 此时抛物线 $y = x^2 - 2ax + 1$ 的对称轴为直线 $x = a (a > 1)$, 且对应方程的判别式 $\Delta = 4(a^2 - 1) > 0$, 即抛物线 $y = x^2 - 2ax + 1$ 与 x 轴有两个交点, 且与 y 轴交于点 $(0, 1)$, 故 A, B 选项错误;

对于 C, D 选项, 由函数 $y = \log_a(x+1)$ 单调递减可知 $0 < a < 1$, 此时抛物线 $y = x^2 - 2ax + 1$ 的对称轴为直线 $x = a (0 < a < 1)$, 且对应方程的判别式 $\Delta = 4(a^2 - 1) < 0$, 即抛物线 $y = x^2 - 2ax + 1$ 与 x 轴没有交点, 故 C 选项正确, D 选项错误. 故选 C.

3. D 【解析】 $a = \log_3 2 < \log_3 3 = 1, b = \log_5 2 < \log_5 5 = 1, c = \log_2 3 > \log_2 2 = 1$.

$$\text{因为 } a = \frac{\lg 2}{\lg 3}, b = \frac{\lg 2}{\lg 5}, \text{ 所以 } a - b = \frac{\lg 2}{\lg 3} -$$

$$\frac{\lg 2}{\lg 5} = \frac{\lg 2 \times (\lg 5 - \lg 3)}{\lg 3 \times \lg 5} > 0, \text{ 故 } 0 < b < a < 1,$$

所以 $c > a > b$. 故选 D.

4. D 【解析】由 $f(x) = \ln|2x+1| - \ln|2x-1|$

$$\text{得 } f(x) \text{ 的定义域为 } \left\{ x \mid x \neq \pm \frac{1}{2} \right\}, \text{ 关于}$$

坐标原点对称. 又 $f(-x) = \ln|1-2x| - \ln|-2x-1| = \ln|2x-1| - \ln|2x+1| = -f(x), \therefore f(x)$ 为定义域上的奇函数, 故 A, C 错误;

$$\text{当 } x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \text{ 时, } f(x) = \ln(2x+1) -$$

$$\ln(1-2x), \therefore y = \ln(2x+1) \text{ 在}$$

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \text{ 上单调递增, } y = \ln(1-2x) \text{ 在}$$

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \text{ 上单调递减, } \therefore f(x) \text{ 在}$$



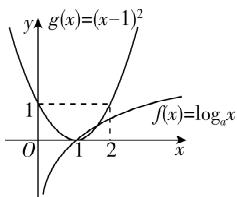
$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 上单调递增, 故 B 错误;

当 $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ 时, $f(x) = \ln(-2x-1) - \ln(1-2x) = \ln \frac{2x+1}{2x-1} = \ln\left(1 + \frac{2}{2x-1}\right)$,

$\therefore \mu = 1 + \frac{2}{2x-1}$ 在 $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ 上单调递减, $f(\mu) = \ln \mu$ 在定义域内单调递增, 根据复合函数单调性可知 $f(x)$ 在 $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ 上单调递减, D 正确. 故选 D.

5. B 【解析】若 $0 < a < 1$, 则当 $x \in (1, 2]$ 时, $\log_a x < 0$, 而 $(x-1)^2 > 0$, 故 $(x-1)^2 < \log_a x$ 无解; 若 $a > 1$, 则当 $x \in (1, 2]$ 时, $\log_a x > 0$, 而 $(x-1)^2 > 0$.

令 $f(x) = \log_a x$, $g(x) = (x-1)^2$, 作出两函数的图象如图所示,



要想 $(x-1)^2 < \log_a x$ 在 $x \in (1, 2]$ 上恒成立, 则 $\log_a 2 > 1$, 解得 $1 < a < 2$.

综上, 实数 a 的取值范围为 $(1, 2)$.

故选 B.

6. C 【解析】函数 $f(x) = \ln[1 + (1-x)^2]$ 定义域为 \mathbf{R} , 其图象对称轴为直线 $x = 1$, 函数 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递减. 又 $t^2 + 2t + 4 = (t+1)^2 + 3 \geq 3$, 即对于任意 $t \in \mathbf{R}$, $f(t^2 + 2t + 4) \geq f(3)$, 则依题意, 有 $f(k) < f(3)$.

由对称轴直线 $x = 1$ 可知 $|k-1| < |3-1|$, 解得 $-1 < k < 3$, 所以实数 k 的取值范围是 $(-1, 3)$. 故选 C.

7. B 【解析】函数 $f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 且 $f(-x) = \ln\left[1 + \frac{1}{(-x)^2}\right] = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = f(x)$, 所以函数 $f(x)$ 为偶函数. 设 $t = 1 + \frac{1}{x^2}$, 则 $y = \ln t$.

因为函数 $y = \ln t$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 函数 $t = 1 + \frac{1}{x^2}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递



减, 所以函数 $f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

$$a = f\left(\log_3 \frac{1}{2}\right) = f(-\log_3 2) = f(\log_3 2).$$

由 $0 < \log_3 2 < \log_3 3 = 1$, $1 < 2^{\frac{1}{2}} = 8^{\frac{1}{6}} < 9^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{1}{3}}$, 得 $0 < \log_3 2 < 2^{\frac{1}{2}} < 3^{\frac{1}{3}}$, 所以 $f(\log_3 2) > f(2^{\frac{1}{2}}) > f(3^{\frac{1}{3}})$, 即 $a > b > c$. 故选 B.

8. C 【解析】因为函数 $f(x) = \begin{cases} (2a-1)x^2 + 5a, & x < 1, \\ e^{x-1} + \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$ 的值域为 \mathbf{R} , 而

当 $x \geq 1$ 时, 易知 $y = e^{x-1} + \ln x$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $y = e^{x-1} + \ln x \geq e^{1-1} + \ln 1 = 1$, 即 $y = e^{x-1} + \ln x$ 在 $[1, +\infty)$

上的值域为 $[1, +\infty)$, 所以当 $x < 1$ 时, $y = (2a-1)x^2 + 5a$ 在 $(-\infty, 1)$ 上的值域要包含 $(-\infty, 1)$, 所以 $y = (2a-1)x^2 + 5a$ 的图象开口向下, 又 $y = (2a-1)x^2 + 5a$ 的对称轴为直线 $x = 0$, 所以

$$\begin{cases} 2a-1 < 0, \\ 5a \geq 1, \end{cases} \text{ 解得 } \frac{1}{5} \leq a < \frac{1}{2}, \text{ 所以实数}$$

a 的取值范围为 $\left[\frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right)$. 故选 C.

9. D 【解析】因为 $\frac{1}{2^x} - a$ 在 $[-2, 0]$ 上单调

递减, 所以 $\frac{1}{2^x} - a \in [1-a, 4-a]$, 则

$$f(x) \in [\log_2(1-a), \log_2(4-a)].$$

又存在 $x_1, x_2 \in [-2, 0]$, 使 $|f(x_1) - f(x_2)| \geq 3$, 则只需 $f(x)_{\max} - f(x)_{\min} \geq 3$, 而 $f(x)_{\max} - f(x)_{\min} = \log_2(4-a) - \log_2(1-a)$

$$= \log_2 \frac{4-a}{1-a} \geq 3 = \log_2 8, \text{ 故 } \begin{cases} \frac{4-a}{1-a} \geq 8, \\ 1-a > 0, \end{cases} \text{ 解}$$

得 $\frac{4}{7} \leq a < 1$, 故选 D.

10. ABD 【解析】将 $I = 1 \text{ W/m}^2$ 代入 $\eta =$

$$10 \lg \frac{I}{I_0} = 120 \text{ 得 } I_0 = \frac{I}{10^{12}} = 10^{-12} \text{ W/m}^2,$$

故 A 正确;

$$\text{当 } \eta = 10 \lg \frac{I}{I_0} \in [70, 80] \text{ 时, } \frac{I}{I_0} =$$

$$10^{\frac{\eta}{10}} \in [10^7, 10^8], \text{ 代入 } I_0 \text{ 可知 } I \in [10^{-5}, 10^{-4}], \text{ 故 B 正确;}$$

$$\text{令 } I_1 = 2I, \text{ 则 } \eta_1 = 10 \lg \frac{2I}{I_0} = 10 \lg 2 + \eta \neq$$

2η , 故 C 错误;



令 $\eta_2 = \eta + 10$, 则 $\frac{I_2}{I_0} = 10^{\frac{\eta_2}{10}} = 10^{\frac{\eta}{10} + 1} = 10 \times$

$\frac{I}{I_0}$, 故 $I_2 = 10I$, 故 D 正确. 故选 ABD.

11. ABD 【解析】由 $10^a + a - 2\ 024 = 0$, $\lg b + b - 2\ 024 = 0$, 令 $c = \lg b$, 得 $b = 10^c$, 则 $c + 10^c - 2\ 024 = 0$, 即 $a + 10^a = c + 10^c$, 而函数 $f(x) = x + 10^x$ 为增函数, 所以 $a = c = \lg b$, $b = 10^a$.

对于 A, $10^a + \lg b = 10^a + a = 2\ 024$, A 正确;

对于 B, $a + 10^a = 2\ 024 = b + \lg b$, B 正确;

对于 C, 函数 $g(a) = a + 10^a$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, 且 $g(3) = 1\ 003 < 2\ 024$, $g(4) = 10\ 004 > 2\ 024$, 则 $3 < a < 4$, $1\ 000 < 10^a < 10\ 000$, 即 $1\ 000 < b < 10\ 000$, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{1}{a} > \frac{1}{4} > \frac{1}{506}$, C 错误;

对于 D, 显然 $\lg a + \lg b = \lg(\lg b) + a$, 因此 $a - \lg a = \lg b - \lg(\lg b)$, D 正确. 故选 ABD.

12. ABD 【解析】A 选项, 若 $f(x)$ 为偶函数, 则 $f(-x) = f(x)$, 即 $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 2ax + 2) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 2ax + 2)$, 则 $x^2 + 2ax + 2 = x^2 - 2ax + 2$, 所以 $a = 0$, 经检验, $a = 0$ 符合题意. 故 A 正确;

B 选项, 若 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 则 $x^2 - 2ax + 2 > 0$ 恒成立, 只需 $\Delta = 4a^2 - 8 < 0$, 解得 $-\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$, 故 B 正确;

C 选项, 若 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 1)$ 上单调递增, 根据复合函数单调性, 只需 $y = x^2 - 2ax + 2$ 在区间 $(-\infty, 1)$ 上单调递

减, 且恒大于零, 因此 $\begin{cases} a \geq 1, \\ 1^2 - 2a + 2 \geq 0, \end{cases}$ 解

得 $1 \leq a \leq \frac{3}{2}$, 故 C 错误;

D 选项, 若 $f(x)$ 的值域是 $(-\infty, 2]$, 即 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 2ax + 2)$ 的最大值为 2,

因此只需 $y = x^2 - 2ax + 2 = (x - a)^2 - a^2 + 2$ 的最小值为 $\frac{1}{4}$, 即 $-a^2 + 2 = \frac{1}{4}$, 解得 $a =$

$\pm \frac{\sqrt{7}}{2}$, 故 D 正确. 故选 ABD.



13. $(1, -1)$ 【解析】因为函数 $y = x^2 - f(x)$ 的图象过点 $(2, 3)$, 所以 $2^2 - f(2) = 3$, 解得 $f(2) = 1$, 即 $y = f(x)$ 的图象过点 $(2, 1)$. 所以 $y = g(x)$ 的图象过点 $(1, 2)$, $y = -g(x)$ 的图象过点 $(1, -2)$, 所以 $y = \sqrt{x} - g(x)$ 的图象过点 $(1, -1)$.

14. $[3, 6]$ 【解析】由题意, 需同时满足以下条件: ① $a > 1$; ② $a - 2x > 0$ 在 $(-\infty, 1]$ 上恒成立; ③ $\frac{a}{6} \leq 1$; ④ $\log_a(a-2) \geq 0$. 由②可得 $a > 2$; 由③可得 $a \leq 6$; 由①和④可得 $a \geq 3$.

综上可得, 实数 a 的取值范围为 $[3, 6]$.

15. $\{a \mid a \geq 2\}$ 【解析】 $\exists x_1 \in [2, +\infty)$, $\forall x_2 \in [\frac{1}{3}, 3]$ 有 $f(x_1) \leq g(x_2)$ 等价于当 $x_1 \in [2, +\infty)$, $x_2 \in [\frac{1}{3}, 3]$ 时, $[f(x_1)]_{\min} \leq [g(x_2)]_{\min}$.

\because 当 $x \in [2, +\infty)$ 时, $x^2 - 1 \geq 3$, 且 $y = \log_3 x$ 在定义域内单调递增, 则 $\log_3(x^2 - 1) \geq \log_3 3 = 1$, \therefore 函数 $f(x) = \log_3(x^2 - 1)$ 在 $[2, +\infty)$ 上的最小值为 $f(x)_{\min} = f(2) = 1$.

又 $\because g(x) = x^2 - 2x + a$ 的图象开口向上且对称轴为直线 $x = 1 \in [\frac{1}{3}, 3]$, 则 $g(x)$ 在 $[\frac{1}{3}, 3]$ 上的最小值为 $g(x)_{\min} = g(1) = a - 1$, $\therefore 1 \leq a - 1$, 解得 $a \geq 2$.

16. 【解】(1) $f(3) = \log_3 27 \cdot \log_3 9 = 3 \times 2 = 6$.

(2) $\because t = \log_3 x$, 且 $\frac{1}{9} \leq x \leq 9$, $\therefore -2 \leq \log_3 x \leq 2$, $\therefore -2 \leq t \leq 2$, $\therefore t$ 的取值范围为 $[-2, 2]$.

(3) $f(x) = (\log_3 x + 2)(\log_3 x + 1) = (\log_3 x)^2 + 3\log_3 x + 2 = t^2 + 3t + 2$, 令 $g(t) = t^2 + 3t + 2 = \left(t + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$, $t \in [-2, 2]$,

①当 $t = -\frac{3}{2}$ 时, $f(x)_{\min} = g(t)_{\min} = -\frac{1}{4}$,

此时 $\log_3 x = -\frac{3}{2}$, 解得 $x = \frac{\sqrt{3}}{9}$.

②当 $t = 2$ 时, $f(x)_{\max} = g(t)_{\max} = g(2) = 12$, 此时 $\log_3 x = 2$, 解得 $x = 9$.



综上,当 $x = \frac{\sqrt{3}}{9}$ 时, $f(x)$ 取最小值 $-\frac{1}{4}$;

当 $x = 9$ 时, $f(x)$ 取最大值 12.

17. 【解】(1) 由题可知 $f(3) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1-3a}{3-1} =$

-1 , 所以 $\frac{1-3a}{2} = 2$, $a = -1$, 所以 $f(x) =$

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1+x}{x-1}.$$

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f(x) + \log_{\frac{1}{2}}(x-1) < m$

恒成立, 即 $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1+x}{x-1} + \log_{\frac{1}{2}}(x-1) < m$, 所

以 $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) < m$ 在 $(1, +\infty)$ 恒成立.

又因为 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x+1) < \log_{\frac{1}{2}} 2 = -1$, 所

以 $m \geq -1$, 即实数 m 的取值范围是

$$\{m \mid m \geq -1\}.$$

(2) 令 $u = \frac{1+x}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$, 在 $[2, 3]$ 上单调

递减, 又 $y = \log_{\frac{1}{2}} u$ 在 $[2, 3]$ 上单调递

减, 所以 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1+x}{x-1}$ 在 $[2, 3]$ 上单调

递增, 令 $g(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x+k)$, 则 $g(x)$

在 $[2, 3]$ 上单调递减, 所以只需要

$$\begin{cases} f(2) \leq g(2), \\ f(3) \geq g(3), \end{cases} \text{ 即可使关于 } x \text{ 的方}$$

程 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x+k)$ 在 $[2, 3]$ 上有解,

$$\text{即 } \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} 3 \leq \log_{\frac{1}{2}}(2+k), \\ \log_{\frac{1}{2}} 2 \geq \log_{\frac{1}{2}}(3+k), \end{cases} \text{ 解得 } -1 \leq k \leq 1,$$

即 k 的取值范围是 $\{k \mid -1 \leq k \leq 1\}$.

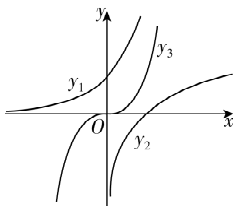
4.4.3 不同函数增长的差异



对点上分

1. A 【解析】在同一坐标系中画出 $y_1 = 3^x$,

$y_2 = \log_3 x$, $y_3 = x^3$ 的大致图象, 如图所示:



结合图象, 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, 函数 y_1 ,

y_2, y_3 均单调递增, A 正确;

当 $x \in (0, +\infty)$ 时, y_2 的增长速度不是一直快于 y_3 , B 错误;

当 $x \in (0, +\infty)$ 时, y_1 的增长速度不是一

直快于 y_2 , C 错误;

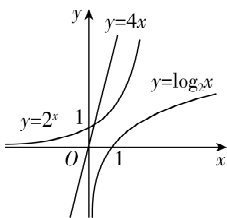
当 $x \in (0, +\infty)$ 时, y_3 的增长速度不是一直快于 y_1 , D 错误. 故选 A.

2. AB 【解析】对于 A, 由对数函数的性质知, 函数 $y = \log_{\frac{1}{5}} x$ 减小的速度越来越慢, 选项 A 正确;

对于 B, 由指数函数的性质知, 指数函数 $y = a^x (a > 1)$ 中, 当 $x > 0$ 时, 底数 a 越大, 其增长速度越快, 选项 B 正确;

对于 C, 由指数函数的性质知, 随着 x 的增大, $y = 1.1^x$ 的增长速度越来越快, 将会远远超过幂函数 $y = x^{100}$ 的增长速度, 因此一定存在一个实数 m , 使得当 $x > m$ 时, $1.1^x > x^{100}$, 选项 C 不正确;

对于 D, 取 $a = 2, k = 4$, 由图知, 在区间 $(0, +\infty)$ 内, 对任意的 x , $\log_a x < kx < a^x$ 不成立, 选项 D 不正确. 故选 AB.



3. y_2 【解析】当函数增长时, 以爆炸式增长的变量呈指数型函数变化.

从表格中可以看出, 四个变量 y_1, y_2, y_3, y_4 均是从 2 开始变化, 且都是越来越大, 但是增长速度不同, 其中变量 y_2 以爆炸式增长, 可知变量 y_2 关于 x 呈指数型函数变化.

4. A 【解析】 $f(-x) = \frac{(-x)^2}{2^{-x} + 2^x} = \frac{x^2}{2^x + 2^{-x}} =$

$f(x)$, 又定义域为 \mathbf{R} , 故函数 $f(x)$ 为偶函数, 可排除 B, D;

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow 0$, 故可排除 C. 故选 A.

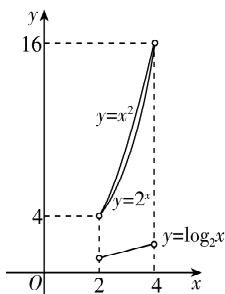
5. BC 【解析】由题图可知, 在区间 $[0, 3]$ 上, 图象是凸起上升的, 表明年产量增长速度越来越慢; 在区间 $(3, 8]$ 上, 图象是水平直线, 表明总产量保持不变, 即年产量为 0. 故选 BC.

6. A 【解析】因为指数函数 $y = 1.05^x$ 的底数大于 1, 其增长速度随着时间的推移会越来越快, 比幂函数 $y = x^2$, 对数型函数



$y = \lg(x+1)$, 一次函数 $y = 50x$ 增长的速度都快, 所以从足够长远的角度看, 使得公司获益最大的生意对应的函数模型是 $y = 10 \times 1.05^x$, 故选 A.

7. B 【解析】在平面直角坐标系中作出 $y = 2^x$, $y = x^2$, $y = \log_2 x$ 在 $(2, 4)$ 上的大致图象如图所示.



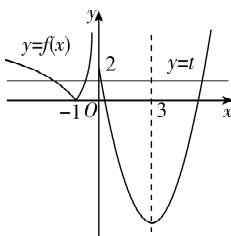
由图象可知, 当 $x \in (2, 4)$ 时, $x^2 > 2^x > \log_2 x$, 故选 B.

8. A 【解析】当 $x > 0$ 时, 令 $2^x - 1 = x$, 解得 $x = 1$, 结合函数 $y = 2^x - 1$ 和 $y = x$ 的增长速度可知当 $x > 1$ 时, $2^x - 1 > x$ 恒成立.

又 $y = x$ 的图象恒在 $y = \log_3 x$ 图象的上方, 即 $x > \log_3 x$ 恒成立, 则 m 的最小值为 1. 故选 A.

9. D 【解析】由题知, $f(x)$ 的大致图象如图所示, 设 $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, 结合图象可得 $x_1 < -1 < x_2 < 0$, 且 $x_3 + x_4 = 6$, $0 < t \leq 2$, 而 $|\log_2(-x_1)| = |\log_2(-x_2)| = t$, 故 $x_2 = -2^{-t}$, $x_1 = -2^t$, 故 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6 - \left(2^t + \frac{1}{2^t}\right)$, $0 < t \leq 2$.

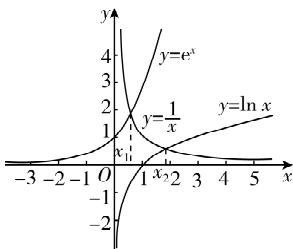
设 $s = 2^t \in (1, 4]$, 而 $y = s + \frac{1}{s}$ 在 $(1, 4]$ 上单调递增, 所以 $2 < s + \frac{1}{s} \leq \frac{17}{4}$, 故 $\frac{7}{4} \leq x_1 + x_2 + x_3 + x_4 < 4$. 故选 D.



10. ①②⑤ 【解析】设 $\ln x = e^y = \frac{1}{z} = k$, $k >$



0, 则 $x = e^k, y = \ln k, z = \frac{1}{k}$, 分别画出函数 $y = e^x, y = \ln x, y = \frac{1}{x}$ 的图象, 如图所示.



根据图象可知, 当 $0 < k < x_1$ 时, $z > x > y$; 当 $k = x_1$ 时, $z = x > y$; 当 $x_1 < k < x_2$ 时, $x > z > y$; 当 $k = x_2$ 时, $x > z = y$; 当 $k > x_2$ 时, $x > y > z$. 故答案为①②⑤.

4.3~4.4 节测上分

1. B 【解析】 $\lg 25 + \frac{2}{3} \lg 8 - \log_2 27 \times \log_3 2 =$

$$\lg(25 \times 8^{\frac{2}{3}}) - \log_2 27 \times \log_3 2 = \lg 10^2 - 3 \log_2 3 \times \log_3 2 = 2 - 3 = -1. \text{ 故选 B.}$$

2. B 【解析】由于 $1 = \log_3 3 < \log_3 4 < \log_3 9 =$

$$2, \log_2 5 > \log_2 4 = 2, c = 3^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \in (0, 1),$$

$$\text{故 } c = 3^{-\frac{1}{2}} < a = \log_3 4 < b = \log_2 5. \text{ 故选 B.}$$

3. ACD 【解析】设燃油汽车、混合动力汽车、电动汽车的声压级分别为 L_1, L_2, L_3 ,

由题知 p_0, p_1, p_2, p_3 均大于 0, $\therefore L_1 - L_2 =$

$$20 \times \lg \frac{p_1}{p_0} - 20 \times \lg \frac{p_2}{p_0} = 20 \times \lg \frac{p_1}{p_2} \geq 0,$$

$$\therefore \frac{p_1}{p_2} \geq 1, \therefore p_1 \geq p_2, \text{ 故 A 正确;}$$

$$\therefore L_2 - L_3 = 20 \times \lg \frac{p_2}{p_3} \geq 10, \therefore \lg \frac{p_2}{p_3} \geq \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{p_2}{p_3} \geq \sqrt{10}, \therefore p_2 \geq \sqrt{10} p_3, \text{ 故 B 错误;}$$

$$\therefore L_3 = 20 \times \lg \frac{p_3}{p_0} = 40, \therefore \frac{p_3}{p_0} = 100, \therefore p_3 =$$

$100 p_0$, 故 C 正确;

$$\therefore L_1 - L_2 = 20 \times \lg \frac{p_1}{p_2} \leq 90 - 50 = 40,$$

$$\therefore \lg \frac{p_1}{p_2} \leq 2, \therefore \frac{p_1}{p_2} \leq 100, \therefore p_1 \leq 100 p_2, \text{ 故}$$

D 正确. 故选 ACD.



一题多解

由 $L_p = 20 \lg \frac{p}{p_0}$, 对于燃油

汽车 $60 \leq 20 \lg \frac{p_1}{p_0} \leq 90$, 即 $3 \leq \lg p_1 -$

$\lg p_0 \leq \frac{9}{2}$, $\therefore \lg(1\,000p_0) = 3 + \lg p_0 \leq$

$\lg p_1 \leq \frac{9}{2} + \lg p_0 = \lg \left(10^{\frac{9}{2}} p_0 \right)$, 即

$1\,000p_0 \leq p_1 \leq 10^{\frac{9}{2}} p_0$; 同理, 对于混合

动力汽车 $10^{\frac{5}{2}} p_0 \leq p_2 \leq 1\,000p_0$; 对于

电动汽车 $20 \lg \frac{p_3}{p_0} = 40$, 则 $\lg p_3 -$

$\lg p_0 = 2$, $\therefore \lg p_3 = 2 + \lg p_0 =$

$\lg(100p_0)$, $\therefore p_3 = 100p_0$, 选项 C 正确.

$p_1 \geq p_2$, 选项 A 正确. $10p_3 = 1\,000p_0$,

则 $p_2 \leq 10p_3$, 选项 B 错误. $10^{\frac{9}{2}} p_0 \leq$

$100p_2 \leq 10^5 p_0$, 则 $p_1 \leq 100p_2$, 选项 D

正确. 故选 ACD.

4. B 【解析】因为 $m = \log_6 2$, $n = \log_6 3$, 则

$6^m = 2$, $6^n = 3$, 可得 $4 = 6^{2m}$, $9 = 6^{2n}$, $4^n =$
 6^{2mn} , $9^m = 6^{2mn}$, 则 $4^n - 9^m = 6^{2mn} - 6^{2mn} = 0$.

又因为 $m + n = \log_6 2 + \log_6 3 = \log_6 6 = 1$, 所

以 $m^2 - n^2 + 2n + 4^n - 9^m = (m + n)(m - n) +$
 $2n = m + n = 1$. 故选 B.

5. C 【解析】因为幂函数 $f(x) = (m^2 - 2m -$

$2)x^m$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 所以

$\begin{cases} m^2 - 2m - 2 = 1, \\ m < 0, \end{cases}$ 解得 $m = -1$, 则 $g(x) =$

$\log_a(x-1) + 2$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$).

因为 $y = \log_a x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的图象过定

点 $(1, 0)$, 所以 $g(x)$ 的图象过定点 $(2,$

$2)$. 故选 C.

6. A 【解析】由题意知 $x_1 = \log_3 2 = \frac{\log_7 2}{\log_7 3} =$

$\frac{2\log_7 2}{2\log_7 3} < \frac{2\log_7 2 + 1}{2\log_7 3 + 1} = \frac{\log_7 28}{\log_7 63} = \log_{63} 28 = x_3$,

又 $x_3 = \log_{63} 28 = \frac{2\log_7 2 + 1}{2\log_7 3 + 1} =$

$\frac{2(\log_7 2 + 1) - 1}{2(\log_7 3 + 1) - 1} < \frac{2(\log_7 2 + 1)}{2(\log_7 3 + 1)} = \frac{\log_7 2 + 1}{\log_7 3 + 1} =$

$\frac{\log_7 14}{\log_7 21} = \log_{21} 14 = x_2$.

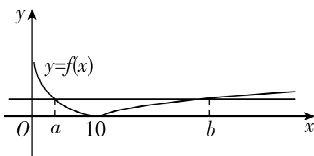
综上, $x_1 < x_3 < x_2$. 故选 A.



7. B 【解析】由题可得 $f(x) = |\lg x - 1| =$

$$\begin{cases} 1 - \lg x, & (0, 10], \\ \lg x - 1, & (10, +\infty), \end{cases} \quad \text{作出 } f(x) \text{ 的大致图}$$

象如图所示.



由 $a < b$, 且 $f(a) = f(b)$, 得 $f(a) = 1 - \lg a$, $f(b) = \lg b - 1$, 即 $1 - \lg a = \lg b - 1$, 解得 $ab = 100$, 所以 $[f(a)]^2 - f(10b) = (1 - \lg a)^2 - [\lg(10b) - 1] = 1 - 2\lg a + \lg^2 a - \lg b = \lg^2 a - \lg(a^2 b) + 1$.

由 $ab = 100$, 得 $\lg^2 a - \lg(a^2 b) + 1 = \lg^2 a - \lg(100a) + 1 = \lg^2 a - \lg a - 1$, 所以 $[f(a)]^2 - f(10b) = \lg^2 a - \lg a - 1 = \left(\lg a - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$. 故当 $\lg a = \frac{1}{2}$, 即 $a = \sqrt{10}$ 时, $[f(a)]^2 - f(10b)$ 取得最小值, 最小值为 $-\frac{5}{4}$. 故选 B.

8. AC 【解析】对于 A, 因为 $f(x)$ 的值域为 $[-1, +\infty)$, 所以 $y = mx^2 + 2x + m - 1$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$, 显然 $m \neq 0$, 否则 $f(x)$ 没有最小值, 由二次函数的图象及性质可

$$\text{知} \begin{cases} m > 0, \\ m\left(-\frac{1}{m}\right)^2 + 2\left(-\frac{1}{m}\right) + m - 1 = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

解得 $m = 2$, 故 A 正确.

对于 B, 因为函数 $f(x)$ 在区间 $[-1, +\infty)$ 上单调递增, 当 $m = 0$ 时, $f(x) = \log_2(2x - 1)$, 定义域为 $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$, 不符合题意;

当 $m \neq 0$ 时, 由复合函数的单调性可知 $g(x) = mx^2 + 2x + m - 1$ 在 $[-1, +\infty)$ 上单调递增, 则 $m > 0$, 且 $-\frac{1}{m} \leq -1$, 又 $g(x) = mx^2 + 2x + m - 1 > 0$ 在 $[-1, +\infty)$ 上恒成立, 则 $m - 2 + m - 1 > 0$, 此时 m 无解, 故 B 错误.

对于 C, 因为 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 所以 $mx^2 + 2x + m - 1 > 0$ 恒成立, 当 $m = 0$ 时, 由 $f(x) = \log_2(2x - 1)$ 有意义, 可得 $2x - 1 > 0$ 恒成立, 显然不满足;



当 $m \neq 0$ 时, 则 $\begin{cases} m > 0, \\ \Delta = 4 - 4m(m-1) < 0, \end{cases}$ 解

得 $m > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, 故 C 正确.

对于 D, 因为 $f(x)$ 的值域为 \mathbf{R} , 当 $m = 0$ 时, 显然满足题意;

当 $m \neq 0$ 时, 则 $\begin{cases} m > 0, \\ \Delta = 4 - 4m(m-1) \geq 0, \end{cases}$ 解

得 $0 < m \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, 所以 $0 \leq m \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. 故 D

错误.

故选 AC.

9. 【解】(1) 将 $(\frac{1}{9}, -2)$ 的坐标代入函数

得 $-2 = \log_a \frac{1}{9}$, 则 $a^{-2} = \frac{1}{9}$, 解得 $a = 3$, 则

$f(x) = \log_3 x$.

$g(x) = \log_3(1-x) - \log_3(1+x)$, 故

$\begin{cases} 1-x > 0, \\ 1+x > 0, \end{cases}$ 得 $-1 < x < 1$, $g(x) = \log_3 \frac{1-x}{1+x}$.

又 $g(-x) + g(x) = \log_3 \frac{1+x}{1-x} + \log_3 \frac{1-x}{1+x} =$

$\log_3 1 = 0$, 故函数 $g(x)$ 的定义域为 $(-1, 1)$, 且为奇函数.

(2) $g(x) = \log_3 \frac{-(1+x)+2}{1+x} = \log_3 \left(\frac{2}{1+x} - 1 \right)$,

$g(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上是减函数, $g(0) = 0$,

$g(4^x - 2^{x+1}) > 0$,

即 $g(4^x - 2^{x+1}) > g(0)$, 故 $-1 < 4^x - 2^{x+1} < 0$,

设 $2^x = t$, 则 $t > 0$, $-1 < t^2 - 2t < 0$,

解得 $0 < t < 2$ 且 $t \neq 1$, 故 $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$.

4.5 函数的应用(二)

4.5.1 函数的零点与方程的解



对点上分

1. D



攻略上分

求二次函数的零点, 直接利用零点定义解方程即可.

【解析】令 $y = x^2 + 3x + 2 = 0$, 解得 $x = -1$ 或 $x = -2$, 由零点定义可得函数 $y = x^2 + 3x + 2$ 的零点是 $-1, -2$. 故选 D.

**易错警示** 不能正确理解函数零点的概念而致错

函数的零点不是一个点的坐标,而是函数解析式对应方程的根(或函数图象与 x 轴交点的横坐标),因此本题中应选 D 而不是选 C.

2. B

攻略上分 观察函数图象,根据零点是函数图象与 x 轴交点的横坐标即可求解.

【解析】 \because 函数图象与 x 轴的交点为 $(2, 0)$, \therefore 函数 $f(x)$ 的零点为 2. 故 B 正确.

3. C

攻略上分 本题是求复合函数的零点问题,通过换元令 $t = 2^x$,再令 $y = 0$,解方程即可得解.

【解析】 由 $4^x - 2^{x+3} + 16 = 0$, 设 $t = 2^x, t > 0$, 可得 $t^2 - 8t + 16 = 0$, 解得 $t = 4$, 从而 $2^x = 4$, 所以 $x = 2$. 故选 C.

4. C

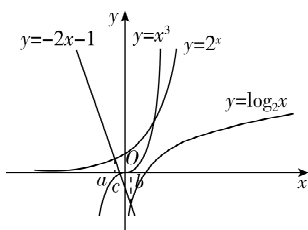
攻略上分 将求零点问题转化为解方程 $f(x) = 0$, 分段函数的零点需要分段求解.

【解析】 当 $x \leq 1$ 时, 令 $f(x) = 0$, 解得 $x = \log_3 2$; 当 $x > 1$ 时, 令 $f(x) = 0$, 解得 $x = 1$ (舍), 所以 $f(x)$ 的零点为 $\log_3 2$. 故选 C.

5. C

攻略上分 将问题转换成比较 $y = 2^x, y = \log_2 x, y = x^3$ 的图象分别与 $y = -2x - 1$ 的图象的交点的横坐标的大小即可判断.

【解析】 分别令 $f(x) = 0, g(x) = 0, h(x) = 0$, 得 $2^x = -2x - 1, \log_2 x = -2x - 1, x^3 = -2x - 1$, 则 a 为函数 $y = 2^x$ 与 $y = -2x - 1$ 的图象的交点的横坐标, b 为函数 $y = \log_2 x$ 与 $y = -2x - 1$ 的图象的交点的横坐标, c 为函数 $y = x^3$ 与 $y = -2x - 1$ 的图象的交点的横坐标. 在同一直角坐标系中, 分别作出 $y = 2^x, y = \log_2 x, y = x^3$ 和 $y = -2x - 1$ 的图象如图所示, 由图可知, $b > c > a$. 故选 C.



6. C



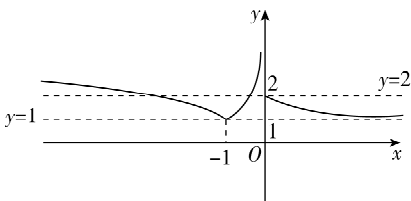
攻略上分

先利用零点和方程的根的关系得到 $f(x) = 2$ 或 $f(x) = 1$, 然后再利用函数的零点和函数图象交点的关系求零点的个数即可.

【解析】函数 $y = f^2(x) - 3f(x) + 2 = [f(x) - 1][f(x) - 2]$ 的零点, 即方程 $f(x) = 1$ 和 $f(x) = 2$ 的根, 即函数 $f(x)$ 的图象与直线 $y = 1$ 和 $y = 2$ 的交点的横坐标.

函数 $f(x) = \begin{cases} |\lg(-x)| + 1, & x < 0, \\ \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$ 的图象如

图所示.



由图可得函数 $f(x)$ 的图象与直线 $y = 1$ 和 $y = 2$ 共有 4 个交点, 则方程 $f(x) = 1$ 和 $f(x) = 2$ 共有 4 个根, 即函数 $y = f^2(x) - 3f(x) + 2$ 有 4 个零点. 故选 C.

7. D 【解析】不妨设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$ 当

$a = -1, b = 1$ 时, $f(-1)f(1) = -1 \times 1 = -1 < 0$, 但 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上没有零点. 所以“函数 $f(x)$ 满足 $f(a)f(b) < 0$ ”不能推出“函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上有零点”, 充分性不成立.

若函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上有零点, 例如函数 $f(x) = x^2$ 在区间 $(-1, 1)$ 上有零点 $x = 0$, 此时 $f(-1)f(1) = 1 \times 1 = 1 > 0$. 这说明“函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上有零点”不能推出“函数 $f(x)$ 满足 $f(a)f(b) < 0$ ”, 必要性不成立.

所以“函数 $f(x)$ 满足 $f(a)f(b) < 0$ ”是“函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上有零点”的既不充分也不必要条件. 故选 D.

8. A 【解析】因为函数 $f(x) = \log_a(x+n) + a^{x-n}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的图象过定点 $(m, 1)$,

所以 $\begin{cases} m+n=1, \\ m-n=0, \end{cases}$ 可得 $m = n = \frac{1}{2}$, 所以



$g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x + \left(\frac{1}{2}\right)^x$. 因为函数 $y =$

$\log_{\frac{1}{2}} x, y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在 $(0, +\infty)$ 上均单调递

减, 所以函数 $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x + \left(\frac{1}{2}\right)^x$

在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 且 $g(1) = \frac{1}{2} >$

$0, g(2) = \log_{\frac{1}{2}} 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4} < 0$, 由零点

存在定理可知, 函数 $g(x)$ 的零点在区间 $(1, 2)$ 内. 故选 A.

9. B 【解析】原方程等价于 $\frac{2^x}{4^x} + \frac{3^x}{4^x} = 1$, 即

$\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{3}{4}\right)^x - 1 = 0$. 设 $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x +$

$\left(\frac{3}{4}\right)^x - 1$, 因为 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x, y = \left(\frac{3}{4}\right)^x$ 均

为 \mathbf{R} 上的减函数, 所以 $f(x)$ 为 \mathbf{R} 上的减

函数, 而 $f(0) = 1 > 0, f(2) = \frac{1}{4} + \frac{9}{16} -$

$1 = -\frac{3}{16} < 0$, 所以 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上仅有一个零

点, 即原方程只有一个实数解. 故选 B.

10. 2 【解析】 \because 函数 $f(x) = 2^x - 5$ 是连续的单调递增函数, 且 $f(2) = -1 < 0$, $f(3) = 3 > 0$, $f(x)$ 在区间 $[2, 3]$ 上有零点, $\therefore f(m+1) = 2^{m+1} - 5 > 0, f(m) = 2^m - 5 < 0, \therefore m = 2$.

11. D



攻略上分

根据函数的单调性和零点存在定理得到端点函数值的正负情况, 列出不等式组求解即可.

【解析】 函数 $f(x) = 2^x + \log_2(x-1) - \frac{a}{2}$

在定义域 $(1, +\infty)$ 上连续且单调递增,

已知函数零点在区间 $(2, 3)$ 内, 则

$$f(2) < 0, f(3) > 0, \text{ 所以 } \begin{cases} 2^2 - \frac{a}{2} < 0, \\ 2^3 + 1 - \frac{a}{2} > 0, \end{cases} \quad \text{解}$$

得 $8 < a < 18$. 故选 D.

12. A



攻略上分

根据函数 $f(x)$ 的性质求出函数 $f(x)$ 的值域, 然后把方程 $f(x) - m = 0$ 仅有 4 个不相等的实数根, 转化为函数零点与值域之间的关系, 利用值域法和数形结合法求解.



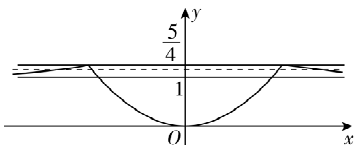
【解析】当 $0 \leq x \leq 2$ 时, $f(x) = \frac{5}{16}x^2$

在 $[0, 2]$ 上单调递增, 其值域为 $\left[0, \frac{5}{4}\right]$.

当 $x > 2$ 时, $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$ 在 $(2, +\infty)$

上单调递减, 其值域为 $\left(1, \frac{5}{4}\right)$.

函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的偶函数, 其图象关于 y 轴对称, 作出函数 $f(x)$ 的图象如图所示.



方程 $f(x) - m = 0$ 仅有 4 个不相等的实数根, 即函数 $y = f(x)$ 的图象与直线 $y = m$ 有 4 个交点.

当 $1 < m < \frac{5}{4}$ 时, 函数 $y = f(x)$ 的图象与直线 $y = m$ 有 4 个交点, 所以实数 m 的取值范围是 $\left(1, \frac{5}{4}\right)$. 故选 A.

13. A

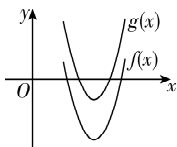


攻略上分

由 $g(x) = (x-a)(x-b)$ 的图象向下平移 2 个单位长度可得到 $f(x) = g(x) - 2$ 的图象, 故可在同一平面直角坐标系内作出函数 $f(x)$, $g(x)$ 的大致图象, 数形结合进行求解.

【解析】由函数 $f(x) = (x-a)(x-b) - 2$ 的零点分别为 α, β , 得 $f(\alpha) = 0$, $f(\beta) = 0$.

令 $g(x) = (x-a)(x-b)$, 则 $g(a) = 0$, $g(b) = 0$, 而 $f(x) = g(x) - 2$, 则 $f(x)$ 的图象可由 $g(x) = (x-a)(x-b)$ 的图象向下平移 2 个单位长度得到, 故可作出函数 $f(x)$, $g(x)$ 的大致图象如图所示.



由图可知 a, b 应介于 α, β 两数之间, 结合选项可知可能的结果为 $\alpha < a < b < \beta$. 故选 A.



14. D 【解析】若 $m=0$, 则 $f(x) = -x-1$, 它的零点为 $-1 \in (-2, 2)$, 故 $m=0$ 符合题意.

若 $m \neq 0$, 函数 $f(x) = 2mx^2 - x - 1$ 在区间 $(-2, 2)$ 内恰有一个零点需满足:

$$\textcircled{1} f(-2) \cdot f(2) < 0 \text{ 或 } \textcircled{2} \begin{cases} f(-2) = 0, \\ -2 < \frac{1}{4m} < 0 \end{cases} \text{ 或}$$

$$\textcircled{3} \begin{cases} f(2) = 0, \\ 0 < \frac{1}{4m} < 2. \end{cases}$$

解 $\textcircled{1}$ 得 $-\frac{1}{8} < m < 0$ 或 $0 < m < \frac{3}{8}$; $\textcircled{2}$ 无解;

解 $\textcircled{3}$ 得 $m = \frac{3}{8}$.

综上, m 的取值范围是 $\left(-\frac{1}{8}, \frac{3}{8}\right]$. 故

D 正确.

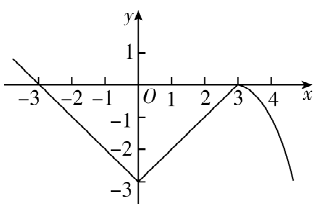
易错警示 忽略含参函数的分类讨论而致错

解此类二次项带参数问题, 容易忽视对二次项系数进行分类讨论, 直接把 $f(x) = 2mx^2 - x - 1$ 当作二次函数处理, 遗漏了 $m=0$ 时的情况, 导致漏解.

15. A

攻略上分 方程 $f^2(x) - af(x) + 2 = 0$ 有 6 个不同的实数根等价于 $t^2 - at + 2 = 0$ 有 2 个不同的实数解 t_1, t_2 , 再结合二次函数的性质求解即可.

【解析】作出 $f(x)$ 的大致图象, 如图所示,



令 $f(x) = t$, 则方程 $f^2(x) - af(x) + 2 = 0$ 有 6 个不同的实数根等价于 $t^2 - at + 2 = 0$ 有 2 个不同的实数解 t_1, t_2 , 且 $t_1, t_2 \in$

$$(-3, 0), \text{ 则 } \begin{cases} a^2 - 8 > 0, \\ 9 + 3a + 2 > 0, \\ -3 < \frac{a}{2} < 0, \end{cases} \text{ 解得 } -\frac{11}{3} < a <$$

$-2\sqrt{2}$, 故选 A.



16. BCD



思路导引

作出 $f(x)$ 的大致图象, 根据图象对选项进行分析, 并结合基本不等式求得正确答案.

【解析】作出 $f(x)$ 的大致图象如图所示.

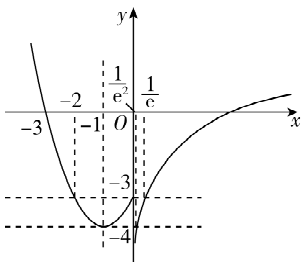
若方程 $f(x) = k$ 有三个不相等的实数解, 则根据图象可得 $k \in (-4, -3]$, 且 $x_1 + x_2 = -2$, 故 A 错误;

令 $-2 + \ln x = -3$, 得 $x = \frac{1}{e}$; 令 $-2 + \ln x = -4$, 得 $x = \frac{1}{e^2}$, 则 $x_3 \in \left(\frac{1}{e^2}, \frac{1}{e}\right]$, 故 B 正确;

$x_1 x_3 + x_2 x_3 = (x_1 + x_2) x_3 = -2x_3 \in \left[-\frac{2}{e}, -\frac{2}{e^2}\right)$, 故 C 正确;

$x_1 x_2 = (-x_1)(-x_2) \leq \left(\frac{-x_1 - x_2}{2}\right)^2 = 1$, 当且仅当 $x_1 = x_2$ 时, 等号成立, 因为 $x_1 \neq x_2$, 所以 $x_1 x_2 < 1$, 故 D 正确.

故选 BCD.

17. 0 或 $-\frac{1}{4}$

【解析】当 $a = 0$ 时, $f(x) = -x - 1$, 令 $f(x) = 0$ 得 $x = -1$, 故 $f(x)$ 只有一个零点为 -1 .

当 $a \neq 0$ 时, $\Delta = 1 + 4a = 0$, 解得 $a = -\frac{1}{4}$.

综上, $a = 0$ 或 $a = -\frac{1}{4}$.

18. $(0, 1)$ 

攻略上分

直线 $y = 2a$ 与函数 $y = |2^x - 2|$ 的图象有两个公共点, 数形结合即可求出参数的取值范围.

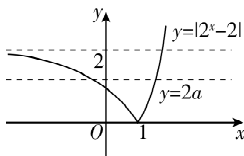
【解析】由 $y = |2^x - 2| = \begin{cases} 2^x - 2, & x \geq 1, \\ 2 - 2^x, & x < 1, \end{cases}$ 作

出函数的大致图象如图.

由图知, 要使直线 $y = 2a$ 与该图象有两个公共点, 则有 $0 < 2a < 2$, 即 $0 < a < 1$. 故



实数 a 的取值范围为 $(0, 1)$.



19.



攻略上分

(1) 令 $f(x) = 0$, 解方程可求得零点;

(2) 采用分离参数的方法可得 $a = 2 \times$

$\left(\frac{1}{3^x}\right)^2 - \frac{1}{3^x}$, 设 $\frac{1}{3^x} = t$, 将问题转化为

直线 $y = a$ 与 $g(t) = 2t^2 - t (t > 0)$ 的图象有两个交点, 采用数形结合的方法即可求得结果.

【解】(1) 当 $a = 1$ 时, $f(x) = 9^x + 3^x - 2 = (3^x)^2 + 3^x - 2 = (3^x + 2)(3^x - 1)$.

令 $f(x) = 0$, 则 $3^x - 1 = 0$, 解得 $x = 0$,

$\therefore f(x)$ 有唯一零点 $x = 0$.

(2) 令 $f(x) = 0$, 则 $a = \frac{2-3^x}{9^x} = 2 \times \left(\frac{1}{3^x}\right)^2 - \frac{1}{3^x}$.

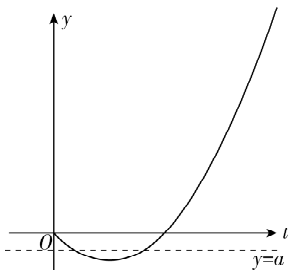
令 $\frac{1}{3^x} = t$, $\because 3^x > 0, \therefore t > 0$, 令 $g(t) = 2t^2 - t (t > 0)$.

\because 函数 $f(x)$ 恰好有两个零点, \therefore 直线 $y = a$ 与 $g(t)$ 的图象有两个交点.

$\because y = 2t^2 - t$ 的图象开口向上, 且对称轴为直线 $t = -\frac{-1}{4} = \frac{1}{4}$, $\therefore g(t)_{\min} = 2 \times \frac{1}{16} -$

$$\frac{1}{4} = -\frac{1}{8}.$$

当 $t = 0$ 时, $g(0) = 0$, 作出 $g(t)$ 的大致图象如图所示,



由图易知当 $-\frac{1}{8} < a < 0$ 时, 直线 $y = a$ 与 $g(t)$ 的图象有两个交点, 即函数 $f(x)$ 恰好有两个零点, \therefore 实数 a 的取值范围为 $\left(-\frac{1}{8}, 0\right)$.



易错警示 不能正确将函数零点等价转化而致错

求解与指数函数有关的方程的根的问题时,常利用换元法转化为熟悉的方程(如一次方程、二次方程等)的根,使用换元法时要注意换元后的等价性,如本题中通过换元后转化的函数要在区间 $(0, +\infty)$ 上有两个零点.



能力上分

1. C 【解析】 \because 函数在 $(0, +\infty)$ 上连续,
且 $f(2) = \ln 2 + 6 - 8 = \ln 2 - 2 < 0$,
 $f(3) = \ln 3 + 9 - 8 = \ln 3 + 1 > 0$,
又函数 $f(x) = \ln x + 3x - 8$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,
 $\therefore x_0 \in [2, 3]$, 即 $a = 2, b = 3, \therefore a + b = 5$.
故选 C.

2. C 【解析】令 $f(x) = x^2 + (a-6)x + 2a-4$,
因为二次方程 $x^2 + (a-6)x + 2a-4 = 0$
在 $(0, 3)$ 上有两个不相等的实根,

$$\text{所以} \begin{cases} 0 < -\frac{a-6}{2} < 3, \\ f(0) > 0, \\ f(3) > 0, \\ f\left(-\frac{a-6}{2}\right) < 0, \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} 0 < -\frac{a-6}{2} < 3, \\ 2a-4 > 0, \\ 5a-13 > 0, \\ -\frac{(a-6)^2}{4} + 2a-4 < 0, \end{cases} \quad \text{解得 } \frac{13}{5} < a < 10-4\sqrt{3}$$

$4\sqrt{3}$, 所以实数 a 的取值范围是 $\left(\frac{13}{5}, 10-4\sqrt{3}\right)$. 故选 C.

方法总结

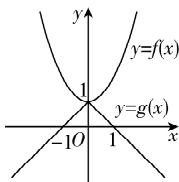
利用二次函数的零点分布求参数,一般要分析以下几个要素:(1)二次项系数的符号;(2)判别式;(3)对称轴的位置;(4)区间端点函数值的符号.结合图象得出关于参数的不等式组并求解.

3. B 【解析】由题易知函数 $f(x), g(x)$ 均为偶函数,除图象的对称轴 $x=0$ 处以外两偶函数的图象的交点成对出现.



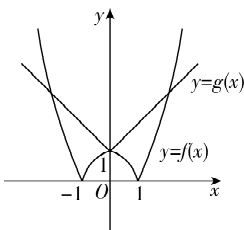
由曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 恰有 3 个交点可知 $f(0)=g(0)$, 即 $|a|=1$, 解得 $a=-1$ 或 $a=1$.

当 $a=-1$ 时, $f(x)=|x^2+1|$, $g(x)=-|x|+1$, 作出 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的大致图象, 如图①所示, 由图①分析可知两函数图象恰有 1 个交点, 不符合题意;



图①

当 $a=1$ 时, $f(x)=|x^2-1|$, $g(x)=|x|+1$, 作出 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的大致图象, 如图②所示, 由图②分析可知符合题意. 故选 B.



图②

4. A 【解析】当 $x>0$ 时, $(ax-1)(x^2-2ax-1) \geq 0$

等价于 $\left(a - \frac{1}{x}\right) \left(x - \frac{1}{x} - 2a\right) \geq 0$,

方程 $x^2-2ax-1=0$ 必有一个正根, 函数

$y=a-\frac{1}{x}$, $y=x-\frac{1}{x}-2a$ 在 $(0, +\infty)$ 上均

单调递增, 命题“ $\forall x>0, (ax-1)(x^2-2ax-1) \geq 0$ ”是真命题, 则函数 $y=a-\frac{1}{x}$,

$y=x-\frac{1}{x}-2a$ 在 $(0, +\infty)$ 上必有相同零

点, 否则存在 $x_0 > 0$ 使得

$\left(a - \frac{1}{x_0}\right) \left(x_0 - \frac{1}{x_0} - 2a\right) < 0$, 因此函数 $y=$

$a - \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上的零点 $\frac{1}{a}$ 是函数

$y=x - \frac{1}{x} - 2a$ 的零点, 即 $\frac{1}{a} - 3a = 0$, 而

$a>0$, 解得 $a=\frac{\sqrt{3}}{3}$, 所以实数 a 的取值集

合为 $\left\{\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$. 故选 A.

5. A 【解析】令 $f(x)=2^x - \log_{\frac{1}{2}} x = 0$, 可得

$2^x = \log_{\frac{1}{2}} x$, 因为 $x>0$, 所以 $2^x > 1$, $\log_{\frac{1}{2}} x >$



1, 可得 $0 < x < \frac{1}{2}$, 所以 $0 < a < \frac{1}{2}$;

令 $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - \log_{\frac{1}{2}} x = 0$, 可得

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \log_{\frac{1}{2}} x,$$

因为 $x > 0$, 所以 $0 < \left(\frac{1}{2}\right)^x < 1, 0 < \log_{\frac{1}{2}} x < 1$,

可得 $\frac{1}{2} < x < 1$, 所以 $\frac{1}{2} < b < 1$;

令 $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - \log_2 x = 0$, 可得

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \log_2 x,$$

因为 $x > 0$, 所以 $0 < \left(\frac{1}{2}\right)^x < 1, 0 < \log_2 x < 1$,

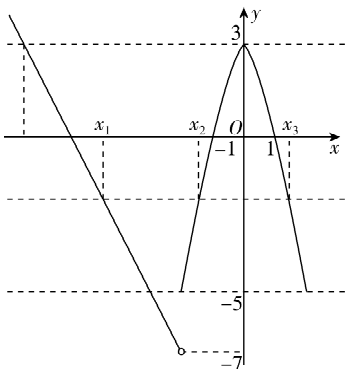
可得 $1 < x < 2$, 所以 $1 < c < 2$.

综上, $a < b < c$. 故选 A.

6. CD 【解析】作出函数 $f(x) =$

$$\begin{cases} -x^2 - 2|x| + 3, & x \geq -2, \\ -2x - 11, & x < -2 \end{cases} \text{ 的大致图象如图}$$

所示.

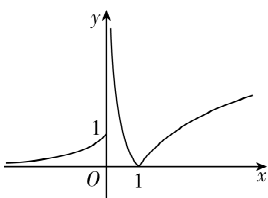


设 $x_1 < x_2 < x_3$, 因为 $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$, 所以 $x_2 + x_3 = 0$.

由图可知, $-5 \leq -2x_1 - 11 < 3$, 所以 $x_1 \in (-7, -3]$, 即 $x_1 + x_2 + x_3 = x_1 \in (-7, -3]$. 故选 CD.

7. C 【解析】当 $x > 0$ 时, $f(x) = |\log_2 x|$;

当 $x \leq 0$ 时, $f(x) = 3^x \in (0, 1]$. 作出函数 $f(x)$ 的大致图象如图所示.



令 $t = f(x)$, 则 $t \geq 0$,

当 $t = 0$ 时, 方程 $f(x) = t$ 有一个实数解;



当 $t > 1$ 时, 方程 $f(x) = t$ 有两个实数解;

当 $0 < t \leq 1$ 时, 方程 $f(x) = t$ 有三个实数解.

由题知 $g(x)$ 恰有 5 个零点, 设 $h(t) = t^2 - 2(m+2)t + 4m$, 所以 $h(t) = t^2 - 2(m+2)t + 4m = 0$ 有两个不相等的实数根 t_1, t_2 , 所以 $[2(m+2)]^2 - 16m = 4m^2 + 16 > 0$.

不妨设 $t_1 < t_2$, 要使 $g(x)$ 有 5 个零点, 则

$$\text{需满足} \begin{cases} 0 < t_1 \leq 1, \\ t_2 > 1. \end{cases}$$

$$\text{则} \begin{cases} h(0) = 4m > 0, \\ h(1) = 1 - 2(m+2) + 4m \leq 0, \end{cases}$$

解得 $0 < m \leq \frac{3}{2}$, 所以实数 m 的取值范围

是 $\left(0, \frac{3}{2}\right]$. 故选 C.

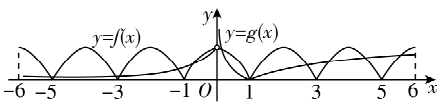
8. C 【解析】 $\because f(x+2) = f(x)$,

$\therefore y = f(x) (x \in \mathbf{R})$ 是周期为 2 的函数.

当 $x \in [-1, 1]$ 时, $f(x) = 1 - x^2$, 则

$$y = f(x), g(x) = \begin{cases} |\lg x|, & x > 0, \\ e^x, & x < 0 \end{cases} \text{ 的部分图}$$

象如图所示.



当 $x < 0$ 时, $g(x) \in (0, 1)$ 且单调递增;

当 $0 < x < 1$ 时, $g(x) \in (0, +\infty)$ 且单调递减;

当 $x > 1$ 时, $g(x) \in (0, +\infty)$ 且单调递增.

又 $f(-6) = 1 > g(-6)$, $f(1) = g(1) = 0$,

$f(6) = 1 > g(6)$, 由图知函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象在区间 $[-6, 6]$ 上共有 12 个交点, 即 $h(x) = f(x) - g(x)$ 在区间 $[-6, 6]$ 内的零点个数为 12. 故选 C.

9. B 【解析】对于 A, 函数 $f(x) = e^x + x - 2$

为 \mathbf{R} 上的增函数, 且 $f(0) = -1 < 0$, $f(1) =$

$e - 1 > 0$, 故零点 $x_0 \in (0, 1)$, 故 A 错误;

对于 B, x_0 是函数 $f(x) = e^x + x - 2$ 的零点,

则 $e^{x_0} + x_0 - 2 = 0$, 变形可得 $e^{x_0} = 2 - x_0$, 两

边同时取对数可得 $\ln(2 - x_0) = x_0$, 故 B 正确;

对于 C, x_0 是函数 $f(x) = e^x + x - 2$ 的零点,

则 $e^{x_0} + x_0 - 2 = 0$, 即 $x_0 = 2 - e^{x_0}$, 故 $x_0 - e^{-x_0} =$

$2 - e^{x_0} - e^{-x_0} = 2 - (e^{x_0} + e^{-x_0})$, 又 $x_0 \in (0,$

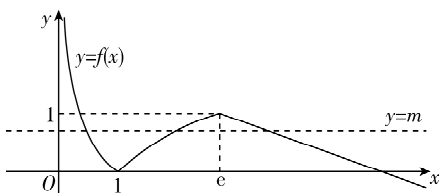


1), 则 $e^{x_0} \in (1, e)$, 根据对勾函数的图象与性质知 $e^{x_0} + e^{-x_0} > 2$, 则 $x_0 - e^{-x_0} < 0$, 故 C 错误;

对于 D, 易知 $x_0 \in (0, 1)$, 则 $2 - x_0 \in (1, 2)$, 则 $e^{2-x_0} > e$, 故 D 错误.

故选 B.

10. (0, 1) 【解析】由题意可知, $y=f(x)$ 与 $y=m$ 的图象有三个交点, 作出函数 $y=f(x)$ 的大致图象如图所示.



当 $x=e$ 时, $f(e)=1$, 由图可知, $0 < m < 1$, 即实数 m 的取值范围是 $(0, 1)$.

11. (1) 【解】 假设函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 有“漂移

点” x_0 , 则 $\frac{1}{x_0+1} = \frac{1}{x_0} + 1$ 有解, 即 $x_0^2 + x_0 + 1 = 0$, 由于方程无实根, 与题设矛盾, 所以函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 没有“漂移点”.

(2) 【证明】令 $h(x) = g(x+1) - g(x) - g(1) = (x+1)^2 + 3^{x+1} - (x^2 + 3^x) - 4 = 2 \times 3^x + 2x - 3$, 所以 $h(0) = -1$, $h(1) = 5$. 所以 $h(0) \cdot h(1) < 0$.

又 $h(x)$ 的图象在 $(0, 1)$ 上连续, 所以 $h(x) = 0$ 在 $(0, 1)$ 上至少有一个实根 x_0 , 即函数 $g(x) = 3^x + x^2$ 在 $(0, 1)$ 上存在“漂移点”.

(3) 【解】若 $h(x) = \lg \frac{a}{x^2}$ 在 $(0, +\infty)$ 上

存在“漂移点” x_0 , 则 $\lg \frac{a}{(x_0+1)^2} =$

$\lg \frac{a}{x_0^2} + \lg a$ 成立, 又 $y = \lg x$ 在 $(0, +\infty)$

上单调递增, 则 $\frac{a}{(x_0+1)^2} = \frac{a}{x_0^2} \times a, a > 0$,

整理得 $a = \frac{x_0^2}{(x_0+1)^2} = \left(\frac{x_0}{x_0+1} \right)^2$.

由 $x_0 > 0, 0 < \frac{x_0}{x_0+1} < 1$, 得 $0 < a < 1$, 即实数 a 的取值范围是 $(0, 1)$.



4.5.2 用二分法求方程的近似解



对点上分

1. B 【解析】对于 A, 函数 $f(x) = \ln x + 2$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, 有唯一零点 $x = e^{-2}$, 所以函数值在零点两侧异号, 故可用二分法求零点;

对于 B, 函数 $f(x) = x^2 + 2\sqrt{2}x + 2 = (x + \sqrt{2})^2 \geq 0$, 故函数 $f(x)$ 有唯一零点 $x = -\sqrt{2}$, 且函数值在零点两侧同号, 故不能用二分法求零点;

对于 C, 当 $x < 0$ 时, $f(x) = x + \frac{1}{x} - 3 = -\left(-x + \frac{1}{-x}\right) - 3 \leq -2\sqrt{-x \cdot \frac{1}{-x}} - 3 = -5$, 当且仅当 $x = -1$ 时, 等号成立, 无零点;

当 $x > 0$ 时, $f(x) = x + \frac{1}{x} - 3 \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} - 3 = -1$, 当且仅当 $x = 1$ 时, 等号成立, 函数在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调

递增, 此时有两个零点 $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$, 且函数值在零点两侧异号, 故可用二分法求零点;

对于 D, 函数 $f(x) = 2^x - 3$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, 有唯一零点 $x = \log_2 3$, 所以函数值在零点两侧异号, 故可用二分法求零点. 故选 B.

2. C 【解析】由题中表格数据可知, $h(0.4375) < 0$, $h(0.75) > 0$, 因为函数 $h(x)$ 在 $(0.4375, 0.75)$ 上连续, 且函数 $h(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增, 所以函数 $h(x)$ 在区间 $(0.4375, 0.75)$ 上存在一个零点, 又因为 $0.75 - 0.4375 = 0.3125 < 0.5$, 即方程 $h(x) = 0$ 的近似解 (精确度为 0.5) 可以是区间 $(0.4375, 0.75)$ 内的任意一个数, 故选 C.

3. B 【解析】由函数的解析式可得函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1, +\infty)$, 且函数 $f(x)$

单调递增, 因为 $f(0) = -\frac{1}{2} < 0$, $f(1) =$

$$\log_3 2 - \frac{1}{3} = \log_3 2 - \log_3 3^{\frac{1}{3}} = \log_3 \left(\frac{8}{3}\right)^{\frac{1}{3}} >$$

$$\log_3 1 = 0, f(2) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} > 0, f(3) =$$



$$\log_3 4 - \frac{1}{5} > 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} > 0, \text{ 结合函数零点}$$

存在定理可知函数 $f(x)$ 的零点在区间 $(0, 1)$ 上, 故选 B.

- 4. B** 【解析】开区间 $(0, 1)$ 的长度为 1, 每经过一次操作, 区间长度变为原来的一半, 经过 n 次操作后, 区间长度为 $\frac{1}{2^n}$, 当二分法求 $f(x) = 0$ 在区间 $(0, 1)$ 上近似解, 要求精确度为 0.1 时, $\frac{1}{2^n} \leq 0.1$, 解得 $n \geq 4$, 所以所需二分区间次数最少为 4 次, 故选 B.

- 5. AD** 【解析】 $\because f(1.25)f(1.5) < 0, \therefore$ 由函数零点存在定理知, 方程 $x^3 + x^2 - 2x - 2 = 0$ 在区间 $(1.25, 1.5)$ 上有实根, 而 $1.5 - 1.375 = 0.125 > 0.1$, 没有达到精确度的要求, 应该接着计算 $f(1.4375)$. 故选 AD.

- 6. A** 【解析】由函数 $f(x) = 2^x - \frac{2x+1}{x-1} = 2^x -$

$$\frac{2x-2+3}{x-1} = 2^x - \frac{3}{x-1} - 2, \text{ 根据指数函数与反}$$

比例函数的性质, 可得函数 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 所以函数 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 至多有一个零点.

又由依次确定的零点所在区间为 $[a, b]$,

$$\left[\frac{a+b}{2}, b\right], \left[\frac{4}{3}a, b - \frac{1}{4}\right],$$

$$\text{可得} \begin{cases} \frac{a+b}{2} = \frac{4a}{3}, \\ \frac{\frac{a+b}{2} + b}{2} = b - \frac{1}{4}, \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} 5a - 3b = 0, \\ b - a = 1, \end{cases}$$

$$\text{解得 } a = \frac{3}{2}, b = \frac{5}{2}, \text{ 故选 A.}$$

- 7. $\frac{3}{4}$** 【解析】设 $f(x) = 2x^3 + 3x - 3$, 则

$$f(0) = -3 < 0, f(1) = 2 > 0, f(0) \cdot f(1) < 0,$$

$$\therefore \text{第一次取区间 } (0, 1) \text{ 的中点 } x_1 = \frac{1}{2},$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{4} < 0, \therefore f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot f(1) < 0, \text{ 故}$$

$$f(x) \text{ 的零点所在的区间为 } \left(\frac{1}{2}, 1\right), \text{ 第二}$$

$$\text{次取区间 } \left(\frac{1}{2}, 1\right) \text{ 的中点 } x_2 = \frac{3}{4}.$$

- 8. 【解】**(1) $y = f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 证明如下:

任取 $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$, 不妨设 $x_1 < x_2$,

$$f(x_2) - f(x_1) = x_2 - x_1 + \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{(x_2 - x_1)(x_1 x_2 - 1)}{x_1 x_2},$$

因为 $1 < x_1 < x_2$, 所以 $x_2 - x_1 > 0, x_1 x_2 - 1 > 0, x_1 x_2 > 0$, 可得 $f(x_2) - f(x_1) > 0$, 即 $f(x_2) > f(x_1)$, 所以函数 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增.

(2) 易知函数 $f(x) = x + \frac{1}{x} - 3$ 在区

间 $(1, +\infty)$ 上是连续且单调的, 且其在区间 $(1, +\infty)$ 上的零点即为方程 $f(x) = 0$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上的解, 且 $f(2) < 0$, $f(3) > 0$, 可得 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 内有且仅有一个零点 $x_0 \in (2, 3)$, 在区间 $(1, +\infty)$ 上利用二分法求其近似解如表所示:

| 区间 | 中点 x_0 | 中点函数值 $f(x_0)$ | 区间长度 |
|----------------|----------|------------------|-------|
| $(2, 3)$ | 2.5 | $f(2.5) < 0$ | 1 |
| $(2.5, 3)$ | 2.75 | $f(2.75) > 0$ | 0.5 |
| $(2.5, 2.75)$ | 2.625 | $f(2.625) > 0$ | 0.25 |
| $(2.5, 2.625)$ | 2.562 5 | $f(2.562 5) < 0$ | 0.125 |

此时解在区间 $(2.562 5, 2.625)$, 此区间长度为 0.062 5, $0.062 5 < 0.1$, 满足精确度为 0.1, 故区间 $(2.562 5, 2.625)$ 内任意一个实数都是对应方程符合精确度要求的一个近似解, 比如 2.6 是方程 $f(x) = 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上的一个近似解 (精确度为 0.1) (答案不唯一).

4.5.3 函数模型的应用



1. A 【解析】由题意可得

$$\begin{cases} 50 - 20 = (80 - 20)e^{-\frac{10}{h}} \text{ ①,} \\ 60 - 20 = (80 - 20)e^{-\frac{t}{h}} \text{ ②,} \end{cases} \quad \text{由①式化简可}$$

得 $h = \frac{10}{\ln 2}$, 代入 ② 式得 $t =$

$$\frac{10 \times (\ln 3 - \ln 2)}{\ln 2} \approx 5.7, \text{ 所以要使茶水能}$$

达到最佳饮用口感大约需要放置



5. 7 min. 故选 A.

2. A 【解析】由题意可得 $0.2 = ab^2$, $0.6 = ab^4 = ab^2 \cdot b^2 = 0.2b^2$, 即有 $b^2 = 3$, 即 $b = \sqrt{3}$, 则 $a = \frac{0.2}{b^2} = \frac{1}{15}$.

令 $ab^t = 1$, 则 $\frac{1}{15} \cdot (\sqrt{3})^t = 1$, 即 $3^{\frac{t}{2}} = 15$,

则 $t = 2 \log_3 15 = 2 \log_3 3 + 2 \log_3 5 = 2 +$

$$\frac{2 \lg 5}{\lg 3} \approx 2 + \frac{2 \times 0.70}{0.48} \approx 2 + 2.9 \approx 5.$$

故这种环保塑料袋要完全降解, 至少需要经过 5 个月. 故选 A.

3. 1.7 【解析】由题意可得
$$\begin{cases} 1 - e^{-\frac{A}{q_v} \omega_1} = 0.5, \\ 1 - e^{-\frac{A}{q_v} \omega_2} = 0.7, \end{cases}$$

整理可得
$$\begin{cases} -\frac{A}{q_v} \omega_1 = \ln 0.5, \\ -\frac{A}{q_v} \omega_2 = \ln 0.3, \end{cases} \quad \text{两式相比可}$$

$$\text{得 } \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\ln 0.3}{\ln 0.5} = \frac{\lg 3 - 1}{-\lg 2} \approx \frac{0.4771 - 1}{-0.3010} \approx$$

1.7.

4. D 【解析】设一般两人小声交谈时声音

强度为 x , 则 $54 = 9 \lg \frac{x}{1 \times 10^{-13}}$,

即 $\lg \frac{x}{1 \times 10^{-13}} = 6$, 所以 $9 \lg \frac{10x}{1 \times 10^{-13}} =$

$$9 \left(\lg 10 + \lg \frac{x}{1 \times 10^{-13}} \right) = 9 \times (1 + 6) = 63, \text{ 即}$$

老师声音的等级约为 63 dB. 故选 D.

5. A 【解析】依题意, 得
$$\begin{cases} 5 + \lg V_1 = 4.3, \\ 5 + \lg V_2 = a, \end{cases} \quad \text{则}$$

$$\lg V_2 - \lg V_1 = a - 4.3, \text{ 即 } \lg \frac{V_2}{V_1} = a - 4.3.$$

由 $2 < \frac{V_2}{V_1} < 3$, 得 $\lg 2 < \lg \frac{V_2}{V_1} < \lg 3$, 因此

$$0.301 < a - 4.3 < 0.477, \text{ 解得 } 4.601 < a <$$

4.777, 所以 a 的值可以是 4.7. 故选 A.

6. B 【解析】设 1 号星到地球的距离为

d_1 , 2 号星到地球的距离为 d_2 , 所以

$$M_1 = m_1 + 5 - 5 \lg \frac{d_1}{3.26}, \quad M_2 = m_2 + 5 -$$

$$5 \lg \frac{d_2}{3.26}, \text{ 两式相减可得 } M_1 - M_2 =$$

$$m_1 - m_2 - 5 \lg \frac{d_1}{d_2}, \text{ 则 } \lg \frac{d_1}{d_2} =$$

$$\frac{m_1 - m_2 - (M_1 - M_2)}{5} = \frac{m_1 - M_1 - (m_2 - M_2)}{5},$$



所以 $\frac{d_1}{d_2} = 10^{\frac{m_1 - M_1 - (m_2 - M_2)}{5}}$. 故选 B.

7. D 【解析】由题意知, 当 $0 \leq x \leq 8$ 时, $y = 0.15x$;

当 $x > 8$ 时, $y = 8 \times 0.15 + \log_5 [2(x-8) + 1] = 1.2 + \log_5(2x-15)$.

所以 $y = \begin{cases} 0.15x, & 0 \leq x \leq 8, \\ 1.2 + \log_5(2x-15), & x > 8. \end{cases}$

当 $0 \leq x \leq 8$ 时, $y_{\max} = 0.15 \times 8 = 1.2 < 3.2$,
故小江的销售利润 $x > 8$, 所以 $1.2 + \log_5(2x-15) = 3.2$, 解得 $x = 20$, 所以小江的销售利润是 20 万元. 故选 D.

8. C 【解析】设燃料质量不同的火箭的最大速度之差与火箭质量的自然对数之差成正比的比例系数为 k .

又当燃料质量为 m kg 时, 该火箭的最大速度为 $3 \ln 2$ km/s; 当燃料质量为 $m(e-1)$ kg 时, 该火箭的最大速度为 3 km/s, 所以 $3 - 3 \ln 2 = k [\ln(me - m + m) - \ln(m+m)]$, 解得 $k = 3$.

设燃料质量为 $m(e^4-1)$ kg 时, 火箭的最大速度为 y , 则 $y - 3 \ln 2 = 3 [\ln(me^4 - m + m) - \ln(2m)]$, $y = 3(4 - \ln 2) + 3 \ln 2 = 12$, 故选 C.

9. A 【解析】根据题意, 对于①, $x \geq 0, y > 0$, 即函数的定义域为 $[0, +\infty)$, 值域为 $(0, +\infty)$, 故 B 错误;

对于②, y 随 x 的增加而增加, 且增加的速度越来越快, 即函数为增函数, 且增加的速度越来越快, 故 A 正确, CD 错误.

10. 【解】(1) 对于模型③ $y = k \cdot \log_2 \left(\frac{x}{10} + 2 \right) + n$ ($k > 0$), 对数型的函数增长速度较慢, 符合题意, 故选择模型③.

(2) 由题意可知所求函数图象过点 $(0, 0), (20, 3)$, $\therefore \begin{cases} k \log_2 2 + n = 0, \\ k \log_2 \left(\frac{20}{10} + 2 \right) + n = 3, \end{cases}$

解得 $k = 3, n = -3$, \therefore 所求函数为 $y = 3 \log_2 \left(\frac{x}{10} + 2 \right) - 3$.

经检验, 当 $x = 60$ 时, $y = 3 \log_2 \left(\frac{60}{10} + 2 \right) - 3 = 6$, 符合题意.



综上所述,函数的解析式为 $y =$

$$3 \log_2 \left(\frac{x}{10} + 2 \right) - 3.$$

(3) \because 每天得分不少于 4.5 分,

$$\therefore 3 \log_2 \left(\frac{x}{10} + 2 \right) - 3 \geq 4.5, \text{ 即}$$

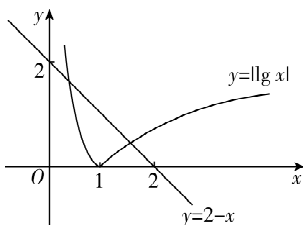
$$\log_2 \left(\frac{x}{10} + 2 \right) \geq \frac{5}{2}, \therefore \frac{x}{10} + 2 \geq 2^{\frac{5}{2}} = 4\sqrt{2},$$

$$\text{即 } x \geq 40\sqrt{2} - 20 \approx 40 \times 1.414 - 20 =$$

$$36.56 \approx 37, \therefore \text{至少需要锻炼 } 37 \text{ 分钟.}$$

4.5 节测上分

- 1. C** 【解析】由 $|\lg x| + x - 2 = 0$ 得 $|\lg x| = 2 - x$, 在同一平面直角坐标系内作出 $y = |\lg x|$ 与 $y = 2 - x$ 的大致图象(如图), 由图可知两个函数的图象有 2 个交点, 所以方程有 2 个解, 故选 C.



- 2. D** 【解析】由题中数据知, 零点区间变化如下: $(1, 2) \rightarrow (1.5, 2) \rightarrow (1.75, 2) \rightarrow (1.75, 1.875) \rightarrow (1.75, 1.8125) \rightarrow (1.75, 1.78125) \rightarrow (1.75, 1.7656) \rightarrow (1.7578, 1.7656)$, 此时区间长度小于 0.01, 在区间 $(1.7578, 1.7656)$ 内取近似值, 最少等分了 7 次, 近似解取 1.76. 故选 D.

- 3. A** 【解析】设小乐同学这次“打水漂”石片的弹跳次数为 x , 由题意得 $10 \times 0.75^x < 2$, 即 $0.75^x < 0.2$, 得 $x > \log_{0.75} 0.2$.

$$\text{因为 } \log_{0.75} 0.2 = \frac{\ln 0.2}{\ln 0.75} = \frac{\ln \frac{1}{5}}{\ln \frac{3}{4}} =$$

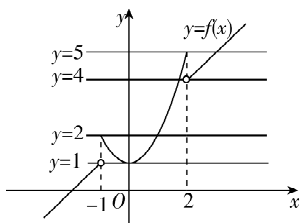
$$\frac{-\ln 5}{\ln 3 - 2\ln 2} \approx 5.3, \text{ 所以 } x > 5.3, \text{ 即 } x = 6. \text{ 故}$$

选 A.

- 4. B** 【解析】由题意知, 当 $(x^2 + 1) - (x + 2) \leq 1$, 即 $-1 \leq x \leq 2$ 时, $f(x) = x^2 + 1$, 当 $(x^2 + 1) - (x + 2) > 1$, 即 $x > 2$ 或 $x < -1$ 时, $f(x) = x + 2$, $\therefore f(x) =$
- $$\begin{cases} x^2 + 1, & -1 \leq x \leq 2, \\ x + 2, & x > 2 \text{ 或 } x < -1. \end{cases}$$



\because 函数 $y=f(x)-c$ 有两个零点, \therefore 函数 $y=f(x)$ 的图象与函数 $y=c$ 的图象有两个交点, 作出函数 $y=f(x)$ 的大致图象如图所示, 由图知, 当 $c \in (1, 2] \cup (4, 5]$ 时, 函数 $y=f(x)-c$ 有两个零点. 故选 B.

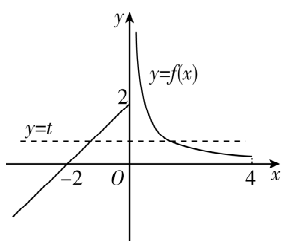


5. B 【解析】设 $f(n)=f(m)=t$, 则 m, n 为直线 $y=t$ 与函数 $y=f(x)$ 图象的两个交点的横坐标, 且 $\frac{1}{4} \leq t \leq 2$.

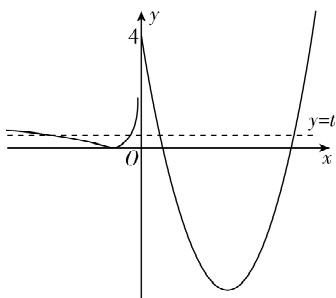
由 $f(n)=f(m)$, 得 $\begin{cases} m+2=t, \\ \frac{1}{n}=t, \end{cases}$ 则 $n+m=t+\frac{1}{t}-2$.

设 $g(t)=t+\frac{1}{t}-2$, $\frac{1}{4} \leq t \leq 2$, 根据对勾函数的图象及性质可知 $g(t)$ 在 $[\frac{1}{4}, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, 2]$ 上单调递

增, 且 $g(\frac{1}{4})=\frac{1}{4}+4-2=\frac{9}{4}$, $g(1)=1+1-2=0$, $g(2)=\frac{1}{2}+2-2=\frac{1}{2}$, 所以 $n+m$ 的取值范围是 $[0, \frac{9}{4}]$. 故选 B.



6. C 【解析】 $f(x)$ 的大致图象如图所示.



函数 $y=f^2(x)-bf(x)+1$ 有 8 个不同的零点, 等价于方程 $f^2(x)-bf(x)+1=0$ 有 8 个不同的实根, 令 $t=f(x)$, 则 $t^2-bt+1=0$ 有两个不同的实根 t_1, t_2 , 且 $t_1, t_2 \in (0,$

4], 当 $f(x) = t = 0$ 时, $t^2 - bt + 1 = 1 > 0$, 所以

$$\begin{cases} 0 < \frac{b}{2} < 4, \\ \Delta = b^2 - 4 > 0, \\ 17 - 4b \geq 0, \end{cases} \text{解得 } 2 < b \leq \frac{17}{4}. \text{ 故选 C.}$$

7. ABC 【解析】对于 A, 由题可画出 $f(x)$ 的大致图象, 则方程 $f(x) = k (k \in \mathbf{R})$ 有四个不同的根等价于 $f(x)$ 的图象与直线 $y = k$ 有 4 个交点, 则由图可得 $0 < k \leq \frac{1}{4}$, 故 A 正确;

对于 B, 由图可得, 当 $k = \frac{1}{4}$ 时, $x_3 = e^{\frac{3}{4}}$,

当 k 趋近于 0 时, $x_3 < e$, 则 $e^{\frac{3}{4}} \leq x_3 < e$, 故 B 正确;

对于 C, 由题可得, $|\ln x_3 - 1| = |\ln x_4 - 1|$,

由图可知 $x_4 > e$, 又 $e^{\frac{3}{4}} \leq x_3 < e$ 所以 $1 - \ln x_3 = \ln x_4 - 1$, 解得 $\ln x_3 + \ln x_4 = \ln(x_3 x_4) = 2$, $x_3 x_4 = e^2$. 又由题及图可得, $-\frac{1}{2} < x_2 \leq 0$, $x_1 + x_2 = -1$, 则

$x_1 x_2 x_3 x_4 = -(x_2 + 1) x_2 \cdot e^2 = -e^2 \left(x_2 + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{e^2}{4}$, 注意到函数 $y = -e^2 \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{e^2}{4}$ 在 $\left(-\frac{1}{2}, 0 \right]$ 上单调递减,

则 $x_1 x_2 x_3 x_4 \in \left[0, \frac{e^2}{4} \right)$, 故 C 正确;

对于 D, 令 $f(x) = t$, 则由 $g(x) = 0$ 可得,

$f(f(x)) - \frac{1}{4} = 0, f(t) = \frac{1}{4}$, 由图可得

$t_1 = -1, t_2 = 0, t_3 = e^{\frac{3}{4}}, t_4 = e^{\frac{5}{4}}$, 则 $g(x) =$

$f(f(x)) - \frac{1}{4}$ 的零点个数为方程 $f(x) =$

$-1, f(x) = 0, f(x) = e^{\frac{3}{4}}, f(x) = e^{\frac{5}{4}}$ 的根的个数之和, 即 $f(x)$ 的图象与直线 $y = -1,$

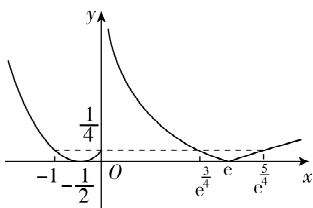
$y = 0, y = e^{\frac{3}{4}}, y = e^{\frac{5}{4}}$ 交点个数之和.

由图可知, $f(x)$ 图象与直线 $y = -1$ 交点个数为 0, 与直线 $y = 0$ 交点个数为 2, 与

直线 $y = e^{\frac{3}{4}}$ 交点个数为 3, 与直线 $y = e^{\frac{5}{4}}$ 交点个数为 3, 则交点个数之和为 8, 即

函数 $g(x) = f(f(x)) - \frac{1}{4}$ 有 8 个零点, 故

D 错误. 故选 ABC.



8. $(-\infty, -8]$ 【解析】 \because 关于 x 的方程 $4^x + (4+a)2^x + 4 = 0$ 有实数根, 由参变分离法得 $-a = 2^x + \frac{4}{2^x} + 4$, 由基本不等式得 $-a = 2^x + \frac{4}{2^x} + 4 \geqslant 2\sqrt{2^x \cdot \frac{4}{2^x}} + 4 = 8$, 当且仅当 $2^x = \frac{4}{2^x}$, 即 $x = 1$ 时, 等号成立, $\therefore -a \geqslant 8$, 解得 $a \leqslant -8$. \therefore 实数 a 的取值范围是 $(-\infty, -8]$.

9. 【解】(1) 因为 $f(x) = \log_2 \sqrt{x+1} + mx + n$, $g(x) = x - \log_2(32-x) + p$, $f(0) = g(0) = 0$, $f(3) = 4$, 所以 $\log_2 \sqrt{0+1} + n = 0$, $\log_2 \sqrt{3+1} + 3m + n = 4$, $-\log_2(32-0) + p = 0$, 解得 $m = 1$, $n = 0$, $p = 5$, 所以 $f(x) = \log_2 \sqrt{x+1} + x$, $g(x) = x - \log_2(32-x) + 5$.

(2) 设 A 生产线投入 x 万元, 则 B 生产线投入 $22-x$ 万元, 设企业获得的利润为 z 万元, 则 $z = f(x) + g(22-x) =$

$$\log_2 \sqrt{x+1} + x + 22 - x - \log_2(10+x) + 5,$$

$0 \leqslant x \leqslant 22$, 所以 $z = \log_2 \sqrt{x+1} -$

$$\log_2(10+x) + 27 = \log_2 \frac{\sqrt{x+1}}{10+x} + 27 =$$

$$\log_2 \frac{1}{\frac{9}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+1}} + 27.$$

由基本不等式可得 $\sqrt{x+1} + \frac{9}{\sqrt{x+1}} \geqslant 6$, 当

且仅当 $x=8$ 时等号成立, 又 $y = \frac{1}{x}$ 在 $(0,$

$22]$ 上单调递减, $y = \log_2 x$ 在 $(0, 22]$ 上单

调递增, 所以 $\log_2 \frac{1}{\sqrt{x+1} + \frac{9}{\sqrt{x+1}}} \leqslant$

$$-\log_2 6, \text{ 所以 } z = \log_2 \frac{1}{\frac{9}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+1}} + 27 \leqslant$$

$27 - \log_2 6 = 26 - \log_2 3$, 当且仅当 $x=8$ 时等号成立.

所以 A 生产线投资 8 万元, B 生产线投资 14 万元时, 企业获得利润最大, 最大



利润为 $26 - \log_2 3$ 万元.

10. 【解】(1) 由题意可知 $f(3) = \frac{1}{a^3+3} = \frac{1}{30}$,

所以 $a^3 = 27$, 解得 $a = 3$, 故 $f(x) = \frac{1}{3^x+3}$.

则 $f(x) + f(2-x) = \frac{1}{3^x+3} + \frac{1}{3^{2-x}+3} = \frac{1}{3^x+3} +$

$\frac{3^x}{3^2+3 \cdot 3^x} = \frac{3^x+3}{3(3^x+3)} = \frac{1}{3}$, 所以

$f(x) + f(2-x)$ 是定值, 定值为 $\frac{1}{3}$.

(2) 由 $|4f(x) - 1| = mf(x)$, 得

$$\left| \frac{4}{3^x+3} - 1 \right| = \frac{m}{3^x+3}, \text{ 即有 } |4 - 3^x - 3| = m,$$

即 $|3^x - 1| = m$.

$$\text{令 } g(x) = |3^x - 1| = \begin{cases} -3^x + 1, & x < 0, \\ 3^x - 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

因为 $g(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递减,

在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 方程 $|3^x -$

$1| = m$ 有两个不相等的实数根, 所

以 $x_1 < 0, x_2 > 0$, 且 $0 < m < 1$, 于是 $-3^{x_1} +$

$1 = m, x_1 = \log_3(1 - m), 3^{x_2} - 1 = m, x_2 =$

$\log_3(m + 1)$, 所以 $2x_2 - x_1 = \log_3 \frac{(m+1)^2}{1-m}$.

由 $0 < 2x_2 - x_1 < 2 - \log_3 2$, 且 $y = \log_3 x$

在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 得 $1 <$

$$\frac{(m+1)^2}{1-m} < \frac{9}{2}.$$

又 $0 < m < 1$, 解得 $0 < m < \frac{1}{2}$, 所以实数 m

的取值范围是 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

11. 【解】(1) 当 $m = 1, n = 2$ 时, $f(x) = x^2 -$

$2x + 2$, 设 x_0 为不动点, 由题知 $x_0^2 - 2x_0 +$

$2 = x_0$, 即 $x_0^2 - 3x_0 + 2 = 0$, 解得 $x_0 = 1$

或 $x_0 = 2$, \therefore 函数 $f(x)$ 的不动点为 1

和 2.

(2) $\because f(x)$ 恒有两个相异的不动点,

$\therefore mx^2 - (m+1)x + n = x$ 恒有两个不等实

根, 整理得到 $mx^2 - (m+2)x + n = 0$, 所

以 $m \neq 0$ 且 $\Delta = (m+2)^2 - 4mn > 0$ 恒

成立.

由题知对于任意 $n \in \left[-\frac{1}{4}, 0\right]$,

$-4mn + m^2 + 4m + 4 > 0$ 恒成立.

令 $g(n) = -4mn + m^2 + 4m + 4$,



$$\therefore \begin{cases} g\left(-\frac{1}{4}\right) > 0, \\ g(0) > 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} m^2 + 5m + 4 > 0, \\ m^2 + 4m + 4 > 0, \end{cases} \text{ 解}$$

得 $m < -4$ 或 $m > -1$, 又 $m \neq 0$,

\therefore 实数 m 的取值范围 $(-\infty, -4) \cup (-1, 0) \cup (0, +\infty)$.

(3) 当 $m = 1$ 时, $f(x) = x^2 - 2x + n$,

$\therefore A \neq \emptyset$, $\therefore x^2 - 3x + n = 0$ 有实数根,

$$\therefore \Delta_1 = 9 - 4n \geq 0, \text{ 解得 } n \leq \frac{9}{4}.$$

记 $y = f(x)$, 则关于 x 的方程 $f(f(x)) = x$

的解为方程组 $\begin{cases} y = x^2 - 2x + n, \\ x = y^2 - 2y + n \end{cases}$ 的解中 x

的值, 两式相减可得 $(x - y)(x + y - 1) =$

0 , $\therefore A = B$, \therefore 要使 $f(x) = x$ 与 $f(y) = x$

有相同的解, 则 $x - y = 0$ 与 $(x - y)(x + y -$

$1) = 0$ 的 x 的解集相同, \therefore 方程 $x + y -$

$1 = 0$ 无解或其解与 $x - y = 0$ 相同,

即 $x^2 - x + n - 1 = 0$ 无解或其解为 $x = \frac{1}{2}$,

$\therefore \Delta' = (-1)^2 - 4(n - 1) \leq 0$, 解得

$$n \geq \frac{5}{4}.$$

综上, $\frac{5}{4} \leq n \leq \frac{9}{4}$, \therefore 实数 n 的取值范

围是 $\left[\frac{5}{4}, \frac{9}{4}\right]$.

12. 【解】 (1) 由 $x_2 \in \left[\frac{1}{e}, e\right]$ 得

$$g(x_2) \in [-1, 1],$$

因为存在 $x_1 \in (-\infty, 0)$, 对任意 $x_2 \in$

$$\left[\frac{1}{e}, e\right], f(x_1) \neq g(x_2) \text{ 成立,}$$

所以 $ae^{2x_1} - e^{x_1} > 1$ 或 $ae^{2x_1} - e^{x_1} < -1$ 在

$(-\infty, 0)$ 上有解, 即 $a > \frac{1}{e^{2x_1}} + \frac{1}{e^{x_1}}$ 或 $a <$

$\frac{1}{e^{x_1}} - \frac{1}{e^{2x_1}}$ 在 $(-\infty, 0)$ 上有解,

令 $t = \frac{1}{e^{x_1}} > 1$, 所以 $a > t^2 + t$ 或 $a < t - t^2$

在 $(1, +\infty)$ 上有解,

又 $t^2 + t > 2$, $t - t^2 < 0$, 所以 $a > 2$ 或 $a < 0$.

故实数 a 的取值范围为 $(-\infty, 0) \cup$

$(2, +\infty)$.

(2) $F(x) = f(x) + f(-x) = ae^{2x} - e^x +$

$$ae^{-2x} - e^{-x} = a(e^x + e^{-x})^2 - (e^x + e^{-x}) - 2a.$$

令 $p = e^x + e^{-x}$, $p \geq 2$ (当且仅当 $x = 0$ 时,



等号成立), 令 $h(p) = ap^2 - p - 2a, p \geq 2$, 故只需要讨论方程 $ap^2 - p - 2a = 0$ 时大于等于 2 的实数解.

①当 $a=0$ 时, $-p=0$, 方程无大于等于 2 的实数解, 所以函数 $F(x)$ 无零点;

②当 $a>0$ 时, $h(0) = -2a < 0$,

若 $h(2) = 2a - 2 > 0$, 即 $a > 1$, 则方程无大于等于 2 的实数解, 所以函数 $F(x)$ 无零点;

若 $h(2) = 2a - 2 = 0$, 即 $a = 1$, 方程有一个等于 2 的解, 此时 $e^x + e^{-x} = 2$, 解得 $x=0$, 所以函数 $F(x)$ 有一个零点;

若 $h(2) = 2a - 2 < 0$, 即 $0 < a < 1$, 方程有一个大于 2 的解, 此时 $e^x + e^{-x} = p$,

$$\text{即 } e^{2x} - pe^x + 1 = 0, \text{ 又 } \begin{cases} p^2 - 4 > 0, \\ p > 0, \\ 1 > 0, \end{cases}$$

则方程有两个实数解, 即函数 $F(x)$ 有两个零点;

③当 $a < 0$ 时, $h(0) = -2a > 0, h(2) = 2a - 2 < 0$, 此时方程无大于等于 2 的实数解, 所以函数 $F(x)$ 无零点.

综上所述, 当 $a=1$ 时, 函数 $F(x)$ 有一个零点; 当 $0 < a < 1$ 时, 函数 $F(x)$ 有两个零点; 当 $a \leq 0$ 或 $a > 1$ 时, 函数 $F(x)$ 无零点.

专题上分 5 函数图象与性质的综合

1. C 【解析】对于 A 和 B, 指数函数 $f(x) = a^x$ 的图象过定点 $(0, 1)$, 且 $f(x)$ 为增函数, 则 $a > 1$, 所以幂函数 $g(x) = x^a$ 也为增函数, 且其函数值增加的越来越快, 故 A, B 错误;

对于 C 和 D, 指数函数 $f(x) = a^x$ 的图象过定点 $(0, 1)$, 且 $f(x)$ 为减函数, 则 $0 < a < 1$, 所以幂函数 $g(x) = x^a$ 为增函数, 且其函数值增加的越来越慢, 故 C 正确, D 错误. 故选 C.

2. A



攻略上分

先找到从函数 $y = f(x)$ 的图象到函数 $y = f(-x)$ 的图象的变换规律, 再整体向右平移一个单位长度. 关于函数图象的变换法则, 具体见“通法攻略 38: 指数、对数函数图象的变换”.



【解析】因为 $f(1-x) = f[-(x-1)]$, 所以可先将 $y=f(x)$ 的图象关于 y 轴翻折得 $y=f(-x)$ 的图象, 再将 $y=f(-x)$ 的图象向右平移一个单位长度得 $y=f(1-x)$ 的图象. 故选 A.

3. C 【解析】设 $g(x) = \ln(\sqrt{x^2+1}-x)$, 因为对任意 $x \in \mathbf{R}$, $\sqrt{x^2+1} > |x| \geq x$,

所以 $\sqrt{x^2+1}-x > 0$, 所以 $g(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 又 $g(-x) = \ln(\sqrt{x^2+1}+x) =$

$$\ln \frac{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)}{\sqrt{x^2+1}-x} =$$

$$\ln \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} = -\ln(\sqrt{x^2+1}-x) = -g(x),$$

所以函数 $g(x) = \ln(\sqrt{x^2+1}-x)$ 为奇函数, 令 $g(x) = \ln(\sqrt{x^2+1}-x) = 0$,

可得 $\sqrt{x^2+1}-x = 1$, 即 $\sqrt{x^2+1} = x+1$, 所以 $x+1 \geq 0$, 可得 $x \geq -1$.

由 $\sqrt{x^2+1} = x+1$ 可得 $x^2+1 = (x+1)^2$, 解得 $x=0$, 所以 $f(x) = \frac{2^x+2^{-x}}{\ln(\sqrt{x^2+1}-x)}$ 的定

义域为 $\{x | x \neq 0\}$, 又 $f(-x) = \frac{2^{-x}+2^x}{g(-x)} =$

$$-\frac{2^{-x}+2^x}{g(x)} = -f(x), \text{ 所以函数 } f(x) \text{ 为奇函数, 排除 B, D;}$$

当 $x > 0$ 时, $\ln(\sqrt{x^2+1}-x) = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$

单调递减, 则 $\ln(\sqrt{x^2+1}-x) < \ln(\sqrt{0+1}-0) = \ln 1 = 0$, $2^x+2^{-x} > 0$, 所以 $f(x) < 0$, 排除 A. 故选 C.

4. D 【解析】 $g(x) = 0$ 等价于 $f(x) = x-1$,

故 $g(x)$ 的零点个数等于曲线 $y=f(x)$ 和直线 $y=x-1$ 的交点个数.

$\because f(x) = -f(x+2), \therefore f(x+4) = -f(x+2) = f(x)$, 故 $f(x)$ 的一个周期为 4, 又

$\because f(x)$ 为奇函数, $\therefore f(x) = -f(2+x) = f(-2-x) = f(2-x)$, 故曲线 $y=f(x)$ 关于直线 $x=1$ 对称.

当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $f(x) = 4^x + 2x - 1$ 单调递增, 可画出 $y=f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的图象,

再根据曲线 $y=f(x)$ 关于直线 $x=1$ 对称可画出 $y=f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上的图象,

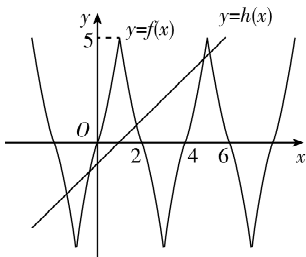
最后利用奇偶性和周期性可画出 $y=f(x)$ 的图象, 再在同一直角坐标系内



画出 $h(x) = x - 1$ 的图象如图所示.

由图可知两图象共有 5 个交点, 则函数 $g(x) = f(x) - x + 1$ 的零点个数为 5.

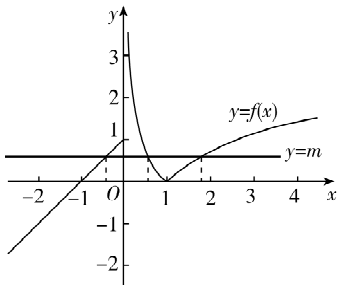
故选 D.



5. ABC 【解析】令 $f(x) = m$, 则方程 $f(x) = m$ 的实数根的个数等价于函数 $f(x)$ 的图象与直线 $y = m$ 交点的个数.

由于 $|\ln x| = \begin{cases} \ln x, & x \geq 1, \\ -\ln x, & 0 < x < 1, \end{cases}$ 所以作函

数 $f(x)$ 的图象如图所示.



当 $m < 0$ 时, 函数 $f(x)$ 的图象与直线 $y = m$ 交点有 1 个, 故方程 $f(x) = m$ 的实数根的个数为 1;

当 $m = 0$ 或 $m > 1$ 时, 函数 $f(x)$ 的图象与直线 $y = m$ 交点有 2 个, 故方程 $f(x) = m$ 的实数根的个数为 2;

当 $0 < m \leq 1$ 时, 函数 $f(x)$ 的图象与直线 $y = m$ 交点有 3 个, 故方程 $f(x) = m$ 的实数根的个数为 3.

方程 $f(f(x)) + a = 0$, 可化为 $f(m) = -a$, 对于 A, B, 当 $a \in (-1, 0)$ 时, $-a \in (0, 1)$, 方程 $f(m) = -a$ 有 3 个实数根, 分别记为 m_1, m_2, m_3 , 且 $-1 < m_1 < 0, 0 < m_2 < 1, m_3 > 1$, 从而 $f(x) = m_1$ 有 1 个实数根, $f(x) = m_2$ 有 3 个实数根, $f(x) = m_3$ 有 2 个实数根, 所以方程 $f(f(x)) + a = 0$ 有 6 个实数根, A, B 正确;

对于 C, 当 $a = 0$ 时, $f(m) = 0$ 有 2 个实数根, 分别为 $-1, 1$, 从而方程 $f(x) = -1$ 有 1 个实数根, 方程 $f(x) = 1$ 有 3 个实数根,



所以方程 $f(f(x)) + a = 0$ 有 4 个实数根, C 正确;

对于 D, 当 $a = -1$ 时, $-a = 1$, 方程 $f(m) = 1$ 有 3 个实数根, 分别为 $0, \frac{1}{e}, e$, 方程 $f(x) = 0$ 有 2 个实数根, 方程 $f(x) = \frac{1}{e}$ 有 3 个实数根, 方程 $f(x) = e$ 有 2 个实数根, 则方程 $f(f(x)) + a = 0$ 有 7 个实数根, D 错误. 故选 ABC.

6. $\left[-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right]$ 【解析】因为函数 $f(x)$ 是定义域为 \mathbf{R} 的奇函数, 所以 $f(0) = 0$.

当 $x > 0$ 时, 由 $\frac{x^2}{t^2} - \frac{x}{2} \geq -\frac{x}{2} + 2t^2$, 解

得 $x \geq \sqrt{2}t^2$, 由 $\frac{x^2}{t^2} - \frac{x}{2} < -\frac{x}{2} + 2t^2$, 解得

$0 < x < \sqrt{2}t^2$,

$$\text{所以 } f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2} + 2t^2, & x \geq \sqrt{2}t^2, \\ \frac{x^2}{t^2} - \frac{x}{2}, & 0 < x < \sqrt{2}t^2, \end{cases}$$

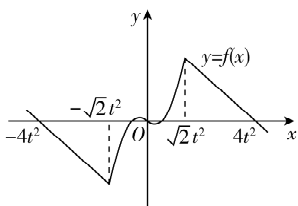
因为 $f(x)$ 是定义域为 \mathbf{R} 的奇函数, 所以当 $x < 0$ 时,

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2} - 2t^2, & x \leq -\sqrt{2}t^2, \\ -\frac{x^2}{t^2} - \frac{x}{2}, & -\sqrt{2}t^2 < x < 0, \end{cases}$$

当 $x \geq \sqrt{2}t^2$ 时, 由 $f(x) = 0$, 得 $x = 4t^2$,

当 $x \leq -\sqrt{2}t^2$ 时, 由 $f(x) = 0$, 得 $x = -4t^2$,

作出函数 $f(x)$ 的图象如图所示,



因为对任意 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $f(x-2) \geq f(x)$,

所以将 $f(x)$ 的图象向右平移 2 个单位长度后, 图象在 $y = f(x)$ 的图象的非下方,

所以 $4t^2 - (-4t^2) \leq 2$ 且由题可知 $t \neq 0$, 解

得 $-\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}$, 且 $t \neq 0$, 即实数 t 的取值

范围是 $\left[-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right]$.



真题上分

1. 64 【解析】因为 $\frac{1}{\log_8 a} - \frac{1}{\log_a 4} = \frac{3}{\log_2 a} - \frac{1}{2} \cdot \log_2 a = -\frac{5}{2}$, 所以 $(\log_2 a + 1)(\log_2 a - 6) = 0$. 又 $a > 1$, 故 $\log_2 a = 6$, 解得 $a = 64$.

2. 1 【解析】 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 4^{\frac{1}{2}} + \log_2 \frac{1}{2} = 2 - 1 = 1$.

3. D 【解析】依题意, 函数 $y = 1.01^x$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, 因为 $0 < 0.5 < 0.6$, 所以 $1 < 1.01^{0.5} < 1.01^{0.6}$, 即 $a < b$. 又 $c = 0.6^{0.5} = \sqrt{\frac{6}{10}} = \frac{\sqrt{15}}{5} < 1$, 所以 $c < a < b$. 故选 D.

4. D 【解析】由指数函数 $y = 4 \cdot 2^x$ 是 \mathbf{R} 上的增函数, 可得 $b > a$, 函数 $y = 4 \cdot 2^x$ 在 $(-\infty, 0)$ 上的值域为 $(0, 1)$, $\therefore 0 < a < 1$. 函数 $y = \log_{4.2} x$ 在 $(0, 1)$ 上的值域为 $(-\infty, 0)$, $\therefore c < 0$. 综上, 可得 $c < a < b$, 故选 D.

5. B 【解析】 $\log_2 \frac{y_1 + y_2}{2} = \log_2 \frac{2^{x_1} + 2^{x_2}}{2} \geq \log_2 \sqrt{2^{x_1} \cdot 2^{x_2}} = \log_2 2^{\frac{x_1 + x_2}{2}} = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $\because x_1 \neq x_2$, \therefore 等号取不到, 即 $\log_2 \frac{y_1 + y_2}{2} > \frac{x_1 + x_2}{2}$. 故选 B.

6. B 【解析】设 $y = f(x) = \frac{\ln |x|}{x^2 + 2}$, 则函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x | x \neq 0\}$, 关于原点对称, 又 $f(-x) = \frac{\ln |-x|}{(-x)^2 + 2} = f(x)$, 所以函数 $f(x)$ 为偶函数, 其图象关于 y 轴对称, 排除 A, C; 当 $x \in (0, 1)$ 时, $\ln |x| < 0$, $x^2 + 2 > 0$, 所以 $f(x) < 0$, 排除 D. 故选 B.

7. B 【解析】当 $x < 0$ 时, 函数 $f(x) = -x^2 - 2ax - a = -(x+a)^2 + a^2 - a$, 若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 则有 $-a \geq 0$, 即 $a \leq 0$; 当 $x \geq 0$ 时, 函数 $f(x) = e^x + \ln(x+1)$, 函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增. 因为函数 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, 所以 $-a \leq e^0 + \ln(0+1) = 1$, 解得 $a \geq -1$. 综上可得 $-1 \leq a \leq 0$. 故选 B.

**快解**当 $a = 1$ 时, $f(x) =$

$$\begin{cases} -(x+1)^2, x < 0, \\ e^x + \ln(x+1), x \geq 0, \end{cases} \quad \text{显然函数 } f(x) =$$

$-(x+1)^2$ 在 $(-\infty, 0)$ 上不单调, 可排除 C 选项和 D 选项; 当 $a = -2$

$$\text{时, } f(x) = \begin{cases} -(x-2)^2 + 6, x < 0, \\ e^x + \ln(x+1), x \geq 0, \end{cases} \quad \text{当 } x \text{ 从}$$

0 的左侧趋近于 0 时, $f(x) \rightarrow 2$,

而 $f(0) = 1$, 所以函数 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上不单调, 可排除 A. 故选 B.

8. D 【解析】注意到 $g(0) = 0$, 所以要使

$g(x)$ 恰有 4 个零点, 则方程 $|kx - 2| =$

$\frac{f(x)}{|x|}$ 恰有 3 个实数解, 令 $h(x) =$

$$\frac{f(x)}{|x|}, x \neq 0, \text{ 即 } y = |kx - 2| \text{ 与 } h(x) = \frac{f(x)}{|x|}$$

的图象有 3 个不同交点.

$$h(x) = \frac{f(x)}{|x|} = \begin{cases} x^2, x > 0, \\ 1, x < 0, \end{cases}$$

当 $k = 0$ 时, $y = 2$, 如图①, $y = 2$ 与 $h(x) =$

$\frac{f(x)}{|x|}$ 的图象有 1 个交点, 不满足题意;

当 $k < 0$ 时, 如图②, 此时 $y = |kx - 2|$ 与

$h(x) = \frac{f(x)}{|x|}$ 的图象恒有 3 个不同交点,

满足题意;

当 $k > 0$ 时, 如图③, 当 $y = kx - 2$ 与 $y = x^2$

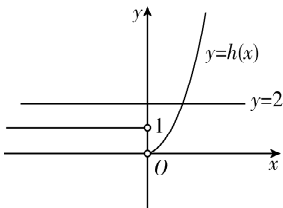
的图象相切时, 可得 $x^2 - kx + 2 = 0$,

令 $\Delta = 0$ 得 $k^2 - 8 = 0$, 解得 $k = 2\sqrt{2}$ (负值舍

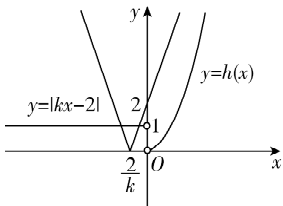
去), 所以 $k > 2\sqrt{2}$.

综上, k 的取值范围为 $(-\infty, 0) \cup$

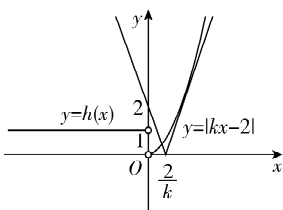
$(2\sqrt{2}, +\infty)$. 故选 D.



图①



图②



图③

9. $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$ 

思路导引

令 $x^2 - ax + 1 = 0$

判别式的正负

→ 判断 $x^2 - ax + 1$ 的正负分类讨论去绝对值, 化简 $f(x)$ 的解析式 $\frac{f(x) \text{ 有且仅有两个零点}}{\text{式}}$ → a 的取值范围【解析】令 $x^2 - ax + 1 = 0$, 则 $\Delta_1 = a^2 - 4$,当 $-2 \leq a \leq 2$ 时, $\Delta_1 \leq 0$, $x^2 - ax + 1 \geq 0$ 恒成立, 此时 $f(x) = (a-1)x^2 + (a-2)x - 1$.当 $a \neq 1$ 时, 令 $f(x) = (a-1)x^2 + (a-2)x - 1 = 0$, 则 $\Delta_2 = (a-2)^2 + 4(a-1) = a^2$, 当 $a \neq 0$ 时, $\Delta_2 > 0$, $f(x)$ 有且仅有两个零点;当 $a = 1$ 时, $f(x) = -x - 1$, $f(x)$ 有且仅有一个零点, 不符合题意,所以 $-2 \leq a < 0$ 或 $0 < a < 1$ 或 $1 < a \leq 2$.当 $a < -2$ 或 $a > 2$ 时, $\Delta_1 > 0$, 方程 $x^2 - ax + 1 = 0$ 有两个不等实根,设为 x_1, x_2 , $x_1 < x_2$, 所以 $f(x) =$

$$\begin{cases} [(a+1)x-1](x-1), & x_1 \leq x \leq x_2, \\ [(a-1)x-1](x+1), & x < x_1 \text{ 或 } x > x_2. \end{cases}$$

设 $g(x) = [(a+1)x-1](x-1)$, 令 $g(x) =$ 0, 解得 $x = 1$ 或 $x = \frac{1}{a+1}$; 设 $h(x) = [(a-1)x-1](x+1)$, 令 $h(x) = 0$, 解得 $x = -1$ 或 $x = \frac{1}{a-1}$.当 $a < -2$ 时, $x_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2} < -1$, $-1 <$ $\frac{1}{a+1} < x_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2} < \frac{1}{a-1} < 0$, 所以 $f(x)$

有且仅有两个零点, 符合题意.

当 $a > 2$ 时, 因为 $x_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2} > 1$, 且 $0 <$ $\frac{1}{a+1} < x_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2} < \frac{1}{a-1} < 1$, 所以 $f(x)$

有且仅有两个零点, 符合题意.

综上所述, a 的取值范围为 $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$.



10. D 【解析】由题意可得
$$\begin{cases} 2. 1 = \frac{S-1}{\ln N_1}, \\ 3. 15 = \frac{S-1}{\ln N_2}, \end{cases}$$

两式相除得 $2.1 \ln N_1 = 3.15 \ln N_2$,

即 $\ln N_1^{2.1} = \ln N_2^{3.15}$, 所以 $N_1^{2.1} = N_2^{3.15}$. 结合选项可知, 选 D.

素养上分

1. B 【解析】设信噪比为 5 000 和 1 000 时的最大信息传送速率分别为 C_1, C_2 .

$$\text{由题意} \quad \frac{C_1}{C_2} = \frac{W \log_2 \left(1 + \frac{S_1}{N_1} \right)}{W \log_2 \left(1 + \frac{S_2}{N_2} \right)} =$$

$$\frac{\log_2(1+5\,000)}{\log_2(1+1\,000)} \approx \frac{\log_2 5\,000}{\log_2 1\,000} = \frac{\lg 5\,000}{\lg 1\,000} =$$

$$\frac{3+\lg 5}{3} = \frac{4-\lg 2}{3},$$

$$\text{由参考数值可得} \quad \frac{C_1}{C_2} - 1 = \frac{4-\lg 2}{3} - 1 \approx$$

$$\frac{1-0.301}{3} \approx 23\%, \text{ 大约增加了 } 23\%, \text{ 故}$$

选 B.

2. BD 【解析】四个选项中的函数的图象显然都是连续不断的.

对于 A, 当 $x_0 + 1 = x_0$ 时, 该方程无解, 故 A 不符合题意;

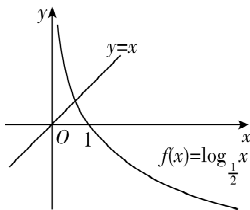
对于 B, 当 $\frac{1}{x_0} - x_0 = x_0, x_0 > 0$ 时, 解得 $x_0 =$

$\frac{\sqrt{2}}{2}$, 故 B 符合题意;

对于 C, 当 $x_0^2 - x_0 + 3 = x_0$, 即 $(x_0 - 1)^2 + 2 = 0$ 时, 无实数根, 故 C 不符合题意;

对于 D, 画出 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ 与 $y = x$ 的图象, 如图所示, 显然两图象有交点, 即存在一个点 x_0 , 使得 $f(x_0) = x_0$, 故 D 符合题意.

综上, 故选 BD.



3. C 【解析】由题意 $f(x) = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$

$$\text{由} f(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{e^{-x} + e^x} = -\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = -f(x), \text{ 得函}$$

数 $f(x)$ 为奇函数.

因为 $f(m-12) + f(m^2) > 0$, 所以 $f(m^2) > -f(m-12) = f(-m+12)$.

因为 $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1}$, $y = e^{2x} + 1$ 为增函数, 所以 $f(x)$ 为增函数, 则 $m^2 > -m + 12$, 即 $m^2 + m - 12 > 0$, 解得 $m < -4$ 或 $m > 3$, 故选 C.

4. B 【解析】由题知, $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \geq a, \\ x^2, & x < a, \end{cases}$

则 $f(-x) = \begin{cases} 2^{-x}, & -x \geq a, \\ (-x)^2, & -x < a, \end{cases}$

即 $f(-x) = \begin{cases} 2^{-x}, & x \leq -a, \\ x^2, & x > -a, \end{cases}$

且当 $x < 0$ 时, $f(-x) = f(x)$ 恰有 2 个解.

易知 $y = 2^x (x > 0)$ 的图象与 $y = x^2 (x > 0)$ 的图象交于点 $(2, 4)$ 与点 $(4, 16)$, 结合 $y = 2^x$ 与 $y = x^2$ 的图象与性质可知:

若 $a = 0$, 则集合 $\{x | x < 0, f(-x) = f(x)\}$ 中有 2 个元素, 符合题意;

若 $a > 0$, 则集合 $\{x | x < 0, f(-x) = f(x)\}$ 中不止 2 个元素, 不符合题意;

若 $a < 0$, 则 $y = 2^{-x}$ 的图象与 $y = x^2$ 的图象在 $(-\infty, a)$ 上有 2 个交点, 则 $a > -2$, 故 $-2 < a < 0$.

综上, a 的取值范围是 $(-2, 0]$, 故选 B.

5. CD 【解析】由题意得 $N = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{12.43}}$, 故

有 $\frac{N}{N_0} = 2^{-\frac{t}{12.43}}$, 等号左右同时取对数得

$\log_2 \frac{N}{N_0} = -\frac{t}{12.43}$, 故得 $t = -12.43 \log_2 \frac{N}{N_0}$,

故 A 错误;

当 $t = 24.86$ 时, $N = N_0 \cdot 2^{-\frac{24.86}{12.43}} = 2^{-2} \cdot$

$N_0 = \frac{1}{4}N_0$, 故 B 错误;

当 $t = 62.15$ 时, $N = N_0 \cdot 2^{-\frac{62.15}{12.43}} = 2^{-5} \cdot$

$N_0 = \frac{1}{32}N_0$, 故经过 62.15 年后, 样本中的

氟元素变为原来的 $\frac{1}{32}$, 故 C 正确;

由题意得 $0.4N_0 = N_0 \cdot 2^{-\frac{x}{12.43}}$, 可得 $x =$

$-12.43 \log_2 \frac{0.4N_0}{N_0} = -12.43 \cdot \log_2 \frac{2}{5}$,

$x = -12.43 (\log_2 2 - \log_2 5) = -12.43 (1 -$



$$\log_2 5) = -12.43 \left(1 - \frac{\lg 5}{\lg 2} \right) = -12.43 \left(1 - \frac{1 - \lg 2}{\lg 2} \right),$$

将 $\lg 2 \approx 0.301$ 代入其中, 可得 $x \approx -12.43 \left(1 - \frac{1 - 0.301}{0.301} \right) \approx 16.4 > 16$, 故 D 正确.

故选 CD.

6. $\left\{ a \mid a < \frac{5}{2} \right\}$ 【解析】若甲对, 则

$f(x) = x^2 - 2ax + 3$ 在 $(-\infty, 1]$ 上单调递减, 且 $x^2 - 2ax + 3 > 0$ 在 $(-\infty, 1]$ 上恒成立, 则

$$\begin{cases} a \geq 1, \\ f(1) = 4 - 2a > 0, \end{cases} \quad \text{解得 } 1 \leq a < 2.$$

若乙对, 则 $\exists x \in \left[\frac{1}{2}, 2 \right]$, 使得 $x + \frac{1}{x} > a$,

因为 $g(x) = x + \frac{1}{x}$ 在 $\left[\frac{1}{2}, 1 \right)$ 上单调递减, 在 $[1, 2]$ 上单调递增, 且 $g\left(\frac{1}{2}\right) = g(2) = \frac{5}{2}$, 所以 $g(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2}, 2 \right]$ 上的最大值为 $\frac{5}{2}$, 可得 $a < \frac{5}{2}$.

若甲、乙说的均不对, 取 $\{a \mid a < 1 \text{ 或 } a \geq 2\}$ 与 $\left\{ a \mid a \geq \frac{5}{2} \right\}$ 的交集, 即 $\left\{ a \mid a \geq \frac{5}{2} \right\}$.

若甲、乙两人至少有一人说的话是对的, 则 a 的取值范围为 $\left\{ a \mid a < \frac{5}{2} \right\}$.

7. ACD 【解析】对于 D, 构造 $f(x) = x + \ln x - 4$, 易得 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 而 $f(e) = e + \ln e - 4 = e - 3 < 0$, $f(3) = 3 + \ln 3 - 4 = \ln 3 - 1 > 0$, 所以方程 $f(x) = 0$ 有唯一的正根, 且该根位于区间 $(e, 3)$ 内. 因为 $a + e^a = b + \ln b = 4$, 所以 $f(e^a) = f(b) = 0$, 则 $e^a = b \in (e, 3)$, 故 $a \in (1, \ln 3)$, $b \in (e, 3)$, $a = \ln b$. 所以 $ab > 1 \cdot e = e$, 故 D 正确;

对于 C, $e^a = b$, $a + e^a = 4$, 故 $a + b = 4$, 而 $1 < a < \ln 3 < e < b$, 所以 $ab = \frac{1}{4}[(a+b)^2 - (a-b)^2] < \frac{1}{4}(a+b)^2 = \frac{1}{4} \cdot 4^2 = 4$, 故 C 正确;



对于 A, B, 由 $a, b > 1$, 知 $a, b, \ln a, \ln b \in (0, +\infty)$. 从而 $a \ln b + b \ln a > a \ln b > 1 \cdot \ln e = 1$, 故 A 正确, B 错误.

故选 ACD.

8. - 2 020 【解析】若 x 是整数, 则

$$[x] + [-x] = x + (-x) = 0.$$

若 x 不是整数, 则 $x - [x] \in (0, 1)$, 故 $1 - x + [x] \in (0, 1)$.

而 $-[x] - 1$ 是整数, $-x = -[x] - 1 + (1 - x + [x])$, 故由 $1 - x + [x] \in (0, 1)$ 知 $[-x] = -[x] - 1$, 所以 $[x] + [-x] = -1$.

$$\text{记 } a_k = [\lg k] + \left[\lg \frac{1}{k} \right], \text{ 则 } a_k = [\lg k] + \left[\lg \frac{1}{k} \right] = [\lg k] + [-\lg k].$$

对 $1 \leq k \leq 2\,024$:

当 $k \in \{1, 10, 100, 1\,000\}$ 时, $\lg k$ 是整数, 所以 $a_k = [\lg k] + [-\lg k] = 0$;

当 $k \notin \{1, 10, 100, 1\,000\}$ 时, $\lg k$ 不是整数, 所以 $a_k = [\lg k] + [-\lg k] = -1$.

$$\begin{aligned} \text{故 } & \sum_{k=1}^{2\,024} [\lg k] + \sum_{k=1}^{2\,024} \left[\lg \frac{1}{k} \right] \\ &= \sum_{k=1}^{2\,024} ([\lg k] + [-\lg k]) \\ &= \sum_{k=1}^{2\,024} a_k = (-1) \times (2\,024 - 4) \\ &= -2\,020. \end{aligned}$$

9. 3 【解析】假设原方程有一个满足

$$x(x^4 - 1) \neq 0 \text{ 的根 } m, \text{ 则 } \frac{e^{m^4-1}-1}{m^4-1} + \frac{e^m-1}{m} = 0.$$

$$\text{令 } f(t) = \frac{e^t-1}{t}, \text{ 则 } f(m^4-1) + f(m) = 0.$$

$$\text{对 } t < 0, \text{ 有 } e^t - 1 < 0, \text{ 故 } \frac{e^t-1}{t} > 0;$$

$$\text{对 } t > 0, \text{ 有 } e^t - 1 > 0, \text{ 故 } \frac{e^t-1}{t} > 0.$$

所以对 $t \neq 0$, 都有 $f(t) > 0$, 从而由 $m(m^4 - 1) \neq 0$ 知 $0 = f(m^4 - 1) + f(m) > 0 + 0 = 0$, 矛盾.

$$\text{所以 } \frac{e^{x^4-1}-1}{x^4-1} + \frac{e^x-1}{x} = 0 \text{ 无解.}$$

故原方程的解满足 $x(x^4 - 1) = 0$, 即 $x \in \{-1, 0, 1\}$, 验证即知 $-1, 0, 1$ 都是原方程的解. 所以原方程一共有 3 个解.



第四章 全章上分

1. D 【解析】原式 $= \frac{2^{2n+2} \cdot 2^{-2n-1}}{(2^2)^n \cdot (2^3)^{-2}} = \frac{2^1}{2^{2n-6}} = 2^{7-2n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-7}$. 故选 D.

2. B 【解析】因为函数 $y = \ln t$ 在定义域上单调递增, 由题意可得 $t = ax - x^2$ 在区间 $[2, 3]$ 上单调递减, 且 $ax - x^2 > 0$ 在区间 $[2, 3]$ 上恒成立.

又 $t = ax - x^2 = -\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4}$, 故需使

$$\frac{a}{2} \leq 2, \text{ 解得 } a \leq 4.$$

由 $ax - x^2 > 0$ 在区间 $[2, 3]$ 上恒成立, 得 $a > 3$.

综上, 可得 $3 < a \leq 4$.

故选 B.

3. B 【解析】在选项 B 中, 先看直线, 即 $y = x + a$ 的图象, 得 $0 < a < 1$, 所以 $y = \log_a x$ 单调递减, 且其图象过点 $(1, 0)$.

因为 $0 < a < 1$, 所以 $\frac{1}{a} > 1$, 所以指数函数

$y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ 单调递增, 且其图象过点 $(0, 1)$. 故 B 正确.

4. A 【解析】依题意, $\Delta L_2 - \Delta L_1 = 10 \cdot$

$$\lg(\pi r_2^2) + k - 10 \cdot \lg(\pi r_1^2) - k = 20 \lg \frac{r_2}{r_1} = 20 \lg 2 \approx 6(\text{dB}). \text{ 故选 A.}$$

5. B 【解析】由函数 $y = \log_{1.6} x$ 单调递增, 得 $a = \log_{1.6} 0.8 < \log_{1.6} 1 = 0$, 由 $y = 1.6^x$ 单调递增, 得 $b = 1.6^{0.8} > 1.6^0 = 1$, 由 $y = 0.8^x$ 单调递减, 得 $0 < 0.8^{1.6} < 0.8^0 = 1$, 即 $0 < c < 1$, 所以 $a < c < b$. 故选 B.

6. C 【解析】令 $g(x) = 2^x - 2^{-x} + \ln \frac{1+x}{1-x}$,

则 $f(x) = g(x) + 1$, 由 $\frac{1+x}{1-x} > 0$, 解得 $x \in (-1, 1)$.

因为 $y = \ln \frac{1+x}{1-x} = \ln \left(-1 + \frac{2}{1-x}\right)$, $y = 2^x$, $y = -2^{-x}$ 都在 $(-1, 1)$ 上单调递增, 所以 $g(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上单调递增.

因为 $g(-x) = 2^{-x} - 2^x + \ln \frac{1-x}{1+x} = -\left(2^x - 2^{-x} + \ln \frac{1+x}{1-x}\right)$, 所以 $g(-x) = -g(x)$,



因为 $f(a) + f(1+a) > 2$, 所以 $g(a) + 1 + g(1+a) + 1 > 2$, 即 $g(a) + g(1+a) > 0$, 所以 $g(a) > -g(1+a) = g(-1-a)$, 所以 $1 > a > -1-a > -1$, 所以 $-\frac{1}{2} < a < 0$. 故选 C.

7. ACD 【解析】对于 A, 因为 $2x + \ln x = \ln(1-y) - 2y$, 由对数函数的定义可得 $x > 0, 1-y > 0, \therefore -x < 0, y < 1, \therefore y-x < 1$, A 正确.

对于 B, D, $2x + \ln x = 2(1-y) + \ln(1-y) - 2 < 2(1-y) + \ln(1-y)$, 即 $2x + \ln x < 2(1-y) + \ln(1-y)$.

构造函数 $f(x) = 2x + \ln x (x > 0)$, 因为 $y = 2x, y = \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上都单调递增, 所以函数 $f(x) = 2x + \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

由 $2x + \ln x < 2(1-y) + \ln(1-y)$ 可得 $f(x) < f(1-y)$, 所以 $x < 1-y$, 所以 $x+y < 1$, B 错误, D 正确.

对于 C, 因为 $x > 0, 1-y > 0, x < 1-y$, 所以 $x^2 < (y-1)^2$, C 正确. 故选 ACD.

8. CD 【解析】对于 A, 当 $a = 0, b = 1$

时, $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4x+3} + 1$, 将 $x = \frac{1}{4}$ 代

入 $f(x)$ 可得, $f\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4 \times \frac{1}{4} + 3} + 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$, 所以函数图象不

经过点 $\left(\frac{1}{4}, 2\right)$, A 错误.

对于 B, 当 $a = 1$ 时, $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4x+3} + b$,

令 $t = x^2 - 4x + 3 = (x-2)^2 - 1$, 二次函数 $t = (x-2)^2 - 1$ 的对称轴为直线 $x = 2$, 在区间 $(2, +\infty)$ 上, t 随 x 的增大而增大.

又指数函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^t$ 是定义域上的减函数, 根据复合函数“同增异减”的原则, 可知 $f(x)$ 在区间 $(2, +\infty)$ 上单调递减, B 错误.

对于 C, 当 $a = b = 1$ 时, $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4x+3} + 1, t = x^2 - 4x + 3 = (x-2)^2 - 1 \geq -1$.

当 $t \geq -1$ 时, $0 < \left(\frac{1}{2}\right)^t \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$, 则

$1 < \left(\frac{1}{2}\right)^t + 1 \leq 3$, 即函数 $f(x)$ 的值域



为 $(1, 3]$, C 正确.

对于 D, 当 $b=0$ 时, $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{ax^2-4x+3}$.

若 $a=0$, 则 $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4x+3}$, 此时函数无最大值.

若 $a \neq 0$, 令 $m = ax^2 - 4x + 3$, 要使 $f(x)$ 有最大值 2, 则 m 有最小值, 且当 m 取最小值时, $f(x)$ 取最大值.

对于二次函数 $m = ax^2 - 4x + 3$, 其图象的对称轴为直线 $x = \frac{2}{a}$ ($a \neq 0$), 则 $a > 0$, 且

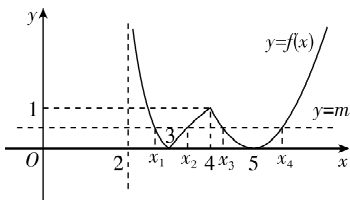
当 $x = \frac{2}{a}$ 时, m 取得最小值 $3 - \frac{4}{a}$.

因为 $f(x)$ 的最大值为 2, 即 $\left(\frac{1}{2}\right)^{3-\frac{4}{a}} = 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$, 所以 $3 - \frac{4}{a} = -1$, 解得 $a = 1$, D 正确. 故选 CD.

9. ABD 【解析】因为 $y = f(x) - m$ 有 4 个不同的零点 x_1, x_2, x_3, x_4 , 且 $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, 所以 $f(x)$ 与 $y = m$ 的图象有 4 个不同的交点, 其横坐标从左到右依次为 x_1, x_2, x_3, x_4 .

又 $f(x) = \begin{cases} |\log_2(x-2)|, & 2 < x \leq 4, \\ x^2 - 10x + 25, & x > 4, \end{cases}$ 利用对

数函数与二次函数的性质作出 $f(x)$ 的大致图象, 如图,



对于 A, 结合图象可知 $0 < m < 1$, $x_1 < 3 < x_2$, 故 A 正确;

对于 B, 因为 $x_1 < 3 < x_2$, 所以 $-\log_2(x_1 - 2) = \log_2(x_2 - 2)$, 即 $\log_2(x_1 - 2) + \log_2(x_2 - 2) = 0$, 所以 $\log_2[(x_1 - 2)(x_2 - 2)] = 0$, 即 $(x_1 - 2)(x_2 - 2) = 1$, 即 $x_1x_2 - 2x_1 - 2x_2 + 4 = 1$, 所以 $2(x_1 + x_2) = x_1x_2 + 3$, 故 B 正确;

对于 C, 由二次函数图象的对称性可知, $x_3 + x_4 = 2 \times 5 = 10$, 故 C 错误;

对于 D, $(x_1 - 2)(x_2 - 2)(x_3 + x_4) = 1 \times 10 = 10$, 故 D 正确. 故选 ABD.

10. $(-1, 0) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right)$ 【解析】由函

数 $f(x-1)$ 的定义域为 $(-1, 3)$, 得



$-1 < x < 3$, 则 $-2 < x-1 < 2$,

对于 $g(x)$, 由
$$\begin{cases} -2 < 2x+1 < 2, \\ x+1 > 0, \\ x+1 \neq 1, \end{cases} \quad \text{解得}$$

$-1 < x < 0$ 或 $0 < x < \frac{1}{2}$, 所以函数 $g(x)$ 的

定义域为 $(-1, 0) \cup (0, \frac{1}{2})$.

11. $-\frac{1}{2}$ 【解析】 函数 $f(x)$ 的定义域

为 $(0, +\infty)$, 当 $0 < x < 1$ 时, $\ln x < 0$, 当 $x = 1$ 时, $\ln x = 0$, 当 $x > 1$ 时, $\ln x > 0$, 要使 $f(x) \geq 0$, 则在 $(0, 1)$ 上 $y = x^2 + ax + b < 0$, 在 $(1, +\infty)$ 上 $y = x^2 + ax + b > 0$.

所以 $x = 1$ 为该二次函数在 $(0, +\infty)$ 上的唯一零点, 易得 $b = -a - 1$.

$y = x^2 + ax - (a+1) = (x-1)[x+(a+1)]$,

且其图象开口向上, 所以 $-(a+1) \leq 0$,

即 $a+1 \geq 0$, 即 $a \geq -1$, 所以 $b^2 - \frac{1}{2}a^2 =$

$(-1-a)^2 - \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{2}(a+2)^2 - 1$, 当 $a =$

-1 时, $b^2 - \frac{1}{2}a^2$ 取得最小值 $-\frac{1}{2}$.

12. $(2, +\infty)$ 【解析】 由题知函数 $f(x) =$

$|2^x - 1|$, 作出函数图象如图所示, 关于 x

的方程 $[f(x)]^2 - af(x) + 1 = 0$ 恰有 3 个

不同的实数根, 令 $t = f(x)$, 根据图象可

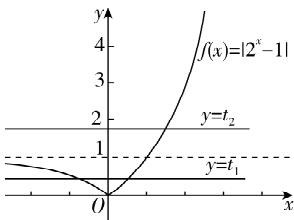
得, $t^2 - at + 1 = 0$ 有 2 个不同的实数根,

设两根为 t_1, t_2 , 且 $t_1 < t_2$, 则 $t_1 \in (0, 1)$,

$t_2 \in [1, +\infty)$,

记 $g(t) = t^2 - at + 1$, 则有
$$\begin{cases} \Delta = a^2 - 4 > 0, \\ g(0) > 0, \\ g(1) \leq 0, \end{cases} \quad \text{解得}$$

$a > 2$, 所以实数 a 的取值范围为 $(2, +\infty)$.



13. 【解】 (1) $\left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} - \left(\frac{49}{9}\right)^{0.5} +$

$(0.008)^{-\frac{2}{3}} \times \frac{2}{25} + (\pi - 1)^0$

$= \left[\left(\frac{3}{2}\right)^3\right]^{-\frac{2}{3}} - \left[\left(\frac{7}{3}\right)^2\right]^{0.5} +$

$[(0.2)^3]^{-\frac{2}{3}} \times \frac{2}{25} + 1$



$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} - \frac{7}{3} + \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} \times \frac{2}{25} + 1 \\
 &= \frac{4}{9} - \frac{7}{3} + 25 \times \frac{2}{25} + 1 \\
 &= \frac{4}{9} - \frac{7}{3} + 3 = \frac{10}{9}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad &\log_5 35 - 2 \log_{0.5} \sqrt{2} - \log_5 \frac{1}{50} - \\
 &\log_5 14 - 5^{\log_5 3} + \log_3 2 \cdot \log_2 9 \\
 &= \log_5 35 + 1 + \log_5 50 - \log_5 14 - 3 + \frac{\lg 2}{\lg 3} \cdot \\
 &\frac{\lg 9}{\lg 2} \\
 &= \log_5 \frac{35 \times 50}{14} - 2 + \frac{\lg 2}{\lg 3} \cdot \frac{2 \lg 3}{\lg 2} \\
 &= \log_5 125 - 2 + 2 \\
 &= \log_5 5^3 = 3.
 \end{aligned}$$

- 14. 【解】** (1) 设该锂矿每年的开采率为 a ($0 < a < 1$), 锂矿石开采的总量为 $\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)M$ 吨, 则剩余的锂矿石为 $\frac{\sqrt{2}}{2}M$ 吨, 所以 $M(1-a)^6 = \frac{\sqrt{2}}{2}M$, 即 $(1-a)^6 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 解得 $a = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{12}}$, 故该锂矿每年的开采率为 $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{12}}$.

(2) 该锂矿今后继续开采 n 年后, 剩余的锂矿石为 $\frac{\sqrt{2}}{2}(1-a)^n M$ 吨.

由题意知, $\frac{\sqrt{2}}{2}(1-a)^n \geq \frac{1}{8}$, 得 $(1-a)^n \geq \frac{\sqrt{2}}{8}$, 即 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{12}} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{2}}$.

又因为 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 是减函数, 所以 $\frac{n}{12} \leq \frac{5}{2}$, 得 $n \leq 30$, 所以该锂矿今后最多还能开采 30 年.

- 15. (1) 【解】** 由题意可得 $\begin{cases} 5+x>0, \\ 5-x>0, \end{cases}$ 得 $-5 < x < 5$, $\therefore h(x)$ 的定义域为 $(-5, 5)$.

当 $a = 5$ 时, $h(x) = f(x) + g(x) = \log_5(25-x^2)$,

$\because 0 < 25 - x^2 \leq 25$, $\therefore \log_5(25 - x^2) \leq \log_5 25 = 2$, $\therefore h(x)$ 的值域为 $(-\infty, 2]$.

(2) 【证明】 $M = \{x | f(ax) > 2g(x)\}$,

由 $f(ax) > 2g(x)$, 得 $\log_a(5+ax) > 2\log_a(5-x)$, $\therefore \log_a(5+ax) > \log_a(5-x)^2$.



又 $\because a > 1, \therefore 5+ax > (5-x)^2$.

由 $\begin{cases} 5+ax > 0, \\ 5-x > 0 \end{cases}$ 得 $-\frac{5}{a} < x < 5$.

要证明 $M \neq \emptyset$, 即证 $5+ax > (5-x)^2$ 在 $(-\frac{5}{a}, 5)$ 上有解, 即证 $5+ax > 25-10x+x^2$, 即 $x^2-(a+10)x+20 < 0$ 在 $(-\frac{5}{a}, 5)$ 上有解.

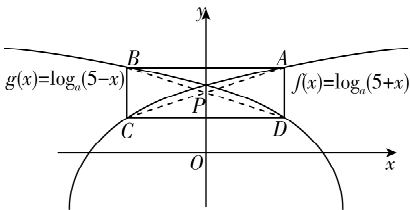
设 $M(x) = x^2 - (a+10)x + 20, \because a > 1,$
 $\therefore \frac{a+10}{2} > \frac{11}{2}, \therefore$ 只需证 $M(5) < 0$.

$\because M(5) = 25 - 5(10+a) + 20 = -5 - 5a < 0,$

$\therefore 5+ax > (5-x)^2$ 在 $(-\frac{5}{a}, 5)$ 上有解, 即 $M \neq \emptyset$ 得证.

(3)【解】如图, 连接 AC, BD, AC 与 BD 的交点即为点 P .

$\because f(-x) = \log_a(5-x) = g(x), \therefore f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象关于 y 轴对称, 由题意可知, 矩形 $ABCD$ 关于 y 轴对称, $\therefore s = 0, a^s = 1$.



设点 A 的坐标为 $(x_0, \log_a(5+x_0)) (x_0 > 0)$, $\therefore ABCD$ 为矩形且 $AB \parallel x$ 轴,

$\therefore AD \parallel y$ 轴, 点 D 的坐标为 $(x_0, \log_a(5-x_0))$, 又 \because 矩形 $ABCD$ 关于 y 轴对称, \therefore 点 B 的横坐标为 $-x_0$, 同理可得点 C 的坐标为 $(-x_0, \log_a(5-x_0))$.

$\because AD = t$, 且该矩形的中心为点 $P(s, t)$,

$$\therefore \begin{cases} \log_a(5+x_0) - \log_a(5-x_0) = t, \\ \log_a(5+x_0) + \log_a(5-x_0) = 2t, \end{cases}$$

消去 t 得 $\log_a(5+x_0) = 3 \log_a(5-x_0)$,

则 $5+x_0 = (5-x_0)^3$, 则 $5+x_0 = 125 + 15x_0^2 - 75x_0 - x_0^3$, 即 $x_0^3 - 15x_0^2 + 76x_0 - 120 = 0$,

可得 $(x_0 - 3)(x_0^2 - 12x_0 + 40) = (x_0 - 3)[(x_0 - 6)^2 + 4] = 0, \therefore x_0 = 3, \therefore t =$

$\log_a(5+x_0) - \log_a(5-x_0) = \log_a 8 - \log_a 2 =$

$\log_a 4$, 故 $a^s + a^t = 1 + a^{\log_a 4} = 1 + 4 = 5$.